BĂRBOSU D. (COORDONATOR),
BERINDE V., COROIAN I., HORVAT-MARC A.,
KOZMA L., KOVACS G., PIŞCORAN L., POP S.M.,
POP A., SASS I.H.A., TAŞCU I.

Matematică
de
bază

UNIVERSITATEA DE NORD
BAIA MARE

Cuprins

Prefaţă

Această lucrare cuprinde în principal temele din programa analitică necesare pregătirii examenului de licenţă la disciplina matematică pentru absolvenţii specializărilor Matematică – Fizică şi Matematică – Informatică din cadrul Universităţii de Nord Baia Mare, Facultatea de Ştiinţe. Cartea poate fi utilă pentru pregătirea examenelor pentru definitivarea în învăţământ şi obţinerea gradului didactic II.

Dorim ca această lucrare să vină în sprijinul viitorilor absolvenţi, drept urmare fiecare din cele trei părti ale lucrării conţine capitole cu rezumate teoretice însoţite de exemple concludente. La finele fiecărei părţi există câte un capitol cu probleme rezolvate integral şi probleme propuse spre rezolvare.

Partea I, ”Algebră”, a fost concepută de către conferenţiar univ. dr. Maria S. Pop împreună cu asistent univ. drd. Adina Pop.

La partea a II-a, ”Geometrie”, au contribuit conferenţiar univ. dr. I.H.A. Sass, asistent univ. dr. L. Pişcoran şi asistent drd. A. Horvat-Marc.

Colectivul care a realizat partea a III-a, ”Analiză Matematică”, este format din conferenţiar univ. dr. Lidia Kozma pentru capitolele *Şiruri de numere reale* şi *Serii de numere*; lector univ. drd. Gabriella Kovacs pentru capitolele *Funcţii* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue* şi *Funcţii* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivabile*; profesor univ. dr. I. Coroian pentru capitolul *Funcţii integrabile Riemann şi primitive*. Problemele date spre rezolvare, din cadrul acestei părţi, au fost selectate şi propuse de către conferenţiar univ. dr. D. Bărbosu, profesor univ. dr. V. Berinde, profesor univ. dr. I. Coroian, lector univ. dr. Ioana Taşcu şi asistent univ. A. Horvat-Marc.

Conf. univ. D. Bărbosu

Partea I

Algebră

Capitolul 1

Grupuri

1.1 Grupuri. Definiţie. Proprietăţi. Exemple.

1.1.1 Definiţie Fie A o mulţime, $n \in \mathbb{N}$ şi $A^n = \left\{(a_1, \ldots, a_n); a_i \in A; i = \overline{1,n}\right\}$.

1^0. Aplicaţia $\varphi : A^n \to A$ care asociază fiecărui n-uplu de elemente din A un element din A, adică $(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ se numeşte **operaţie *n*-ară pe *A*** sau **lege de compoziţie internă**;

2^0. Dacă φ este o operaţie n-ară pe A, submulţimea $B \subseteq A$ cu proprietatea $\varphi\ (B) \subseteq B$ se numeşte **parte stabilă a lui A relativ la** φ, iar restricţia aplica ţiei φ la B^n, deci $\varphi|_{B^n}$ se numeşte **operaţie indusă de** φ **în *B***;

3^0. Perechea $(A,\, \Omega)$ unde Ω este o mulţime de operaţii pe A se numeşte **structură algebrică cu suportul *A*** sau **algebră universală**;

1.1.2 Observaţii. 1) Există şi operaţii parţiale care nu sunt definite pentru orice sistem ordonat de n-elemente din A. Ele se numesc **parţiale**. Aşa sunt, spre exemplu, scăderea în mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ sau împărţirea în mulţimea $\mathbb{Z}$ a întregilor.

2) Pentru $n = 0$ avem $A^0 = \emptyset$ şi operaţia $\varphi : \emptyset \to A$ se numeşte **nulară**; ea **fixează** un anumit element din A.

Pentru $n = 1$, operaţia $\varphi : A \to A$ se numeşte **unară**; ea asociază fiecărui element din A un element şi numai unul din A.

Pentru $n = 2$ operaţia $\varphi : A^2 \to A$ se numeşte **binară.** Vom nota $\varphi(a, b) \overset{not}{=\!=} a * b$ sau aditiv, $a + b$, respectiv multiplicativ, $a \cdot b$ ori simplu ab.

1.1.3 Exemple. 1) În $\mathbb{N}$ existenţa elementului unitate 1 cu proprietatea $\forall x \in \mathbb{N};\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ defineşte o operaţie nulară.

2) În $\mathbb{Z}$ aplicaţia $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(a) = -a$, care asociază fiecărui element opusul său este o operaţie unară.

În continuare studiem structuri algebrice înzestrate cu o operaţie internă binară pe care o vom nota prin $*$ şi vom defini câteva proprietăţi posibile ale unei astfel de operaţii:

1.1.4 Definiţii. O operaţie binară $* : A^2 \to A$ se numeşte:

1^0**. asociativă (as)** dacă $\forall x, y, z \in A; (x * y) * z = x * (y * z)$;

2^0**. comutativă (com)** dacă $\forall x, y \in A; x * y = y * x$;

3^0**. cu element neutru (ne)** dacă $\exists e \in A; \forall x \in A;\ x * e = e * x = x$; spunem în acest caz că avem o **operaţie care are element neutru.**

4^0 **cu element simetrizabil (si)** dacă are element neutru şi pentru $\forall x \in A; \exists x' \in A;\ x * x' = x' * x = e$; Elementul x' se numeşte **simetricul lui *x*.**

În particular, pentru notaţia multiplicativă simetricul unui element x se numeşte **inversul** lui x şi se notează x^{-1}, iar în cazul notaţiei aditive, el se numeşte **opusul** lui x şi se notează prin $-x$.

5^0**.** Elementul $a \in A$ se numeşte **regular (re)** dacă $a * x = a * y$ şi $x * a = y * a$ implică $x = y$.

În cazul notaţiei aditive, dacă din $a + x = a + y$ rezultă $x = y$ respectiv din $x + a = y + a$ rezultă $x = y$, spunem că se poate **reduce** cu a la stânga respectiv la dreapta. În cazul notaţiei multiplicative, dacă pentru $x, y \in A$ din $ax = ay$ rezultă $x = y$ respectiv din $xa = ya$ rezultă $x = y$, spunem că se poate **simplifica** cu a la stânga, respectiv la dreapta.

6^0**.** O proprietate se numeşte **ereditară** dacă din faptul că $B \subseteq A$ şi proprietatea are loc în A, rezultă că ea are loc şi în mulţimea B.

1.1.5 Exemple. 1^0. Adunarea, înmulţirea numerelor reale este asociativă, dar diferenţa sau ridicarea la putere nu sunt asociative;

2^0. Înmulţirea numerelor reale sau complexe este comutativă, dar înmulţirea matricilor, ridicarea la putere sau compunerea funcţiilor nu sunt operaţii comutative;

3^0. În mulţimea matricilor pătrate de ordinul n există element neutru relativ la înmulţire şi anume matricea unitate $I_n = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, unde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = j \\ 0 & \text{pentru } i \neq j \end{cases}$$

este simbolul lui Kronecker.

4^0. Ridicarea la putere în mulţimea numerelor reale strict pozitive nu are element neutru deoarece $a^1 = a \neq 1^a$ pentru $a \neq 1$;

5^0. În mulţimea funcţiilor bijective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu element neutru aplicaţia identică, simetricul lui f este inversa f^{-1}:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6^0. Orice număr natural nenul este regular în raport cu înmulţirea, dar zero nu este regular: $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$ deşi $2 \neq 3$;

7^0. Asociativitatea, comutativitatea, regularitatea sunt proprietăţi ereditare, dar existenţa elementului neutru sau simetrizabil nu sunt ereditare. Spre exemplu, în $\mathbb{Z}$ fiecare element are opus, dar în mulţimea $\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{Z}$ nici un element nu are simetric.

1.1.6 Definiţii. 1^0. Numim **grupoid** perechea $(A, *)$, unde " $*$ " este operaţie binară pe A;

2^0. Un grupoid $(A, *)$ asociativ se numeşte **semigrup**;

3^0. Un semigrup cu element neutru se numeşte **monoid**;

4^0. Un monoid în care fiecare element este simetrizabil se numeşte **grup**;

5^0. Un grupoid (semigrup, monoid, grup) în care operaţia binară este comutativă se numeşte **comutativ**.

Dăm în continuare câteva proprietăţi generale ale structurilor algebrice:

1.1.7 Propoziţii. 1^0. *Dacă într-un grupoid $(A, \cdot)$ există element neutru, atunci acesta este unic;*

2^0. *Orice element simetrizabil într-un monoid are un unic simetric;*

3^0. *Într-un monoid orice element simetrizabil este regular;*

Reciproca în general nu este adevărată: în monoidul $(\mathbb{N}^*, \cdot)$, toate numerele naturale nenule sunt regulare dar nu sunt inversabile (exceptându-l pe 1). În caz finit are loc şi implicaţia inversă afirmaţiei 3^0, adică:

4^0. *Într-un monoid finit orice element regular este simetrizabil;*

5^0. *Într-un monoid, dacă a este simetrizabil atunci şi simetricul lui a, este simetrizabil şi avem $(a')' = a$; Dacă a şi b sunt simetrizabili, atunci ab este simetrizabil şi avem $(a \cdot b)' = b' \cdot a'$;*

Demonstraţie. 1^0. Presupunem că există două elemente neutre e şi e'. Atunci avem:

$$e \overset{e' \text{ ne}}{=} e \cdot e' \overset{e \text{ ne}}{=} e'.$$

2^0. Dacă atât a' cât şi a'' sunt simetricele lui a, atunci:

$$a' \overset{ne}{=} a' \cdot e = a' \cdot (a \cdot a'') = (a' \cdot a)\, a'' = e \cdot a'' = a''.$$

3^0 Dacă $a \cdot x = a \cdot y$ şi a este simetrizabil, atunci înmulţind egalitatea la stânga cu a' şi folosind asociativitatea şi existenţa elementului neutru, avem:

$$(a' \cdot a)x = (a' \cdot a)y \Rightarrow e \cdot x = e \cdot y \Rightarrow x = y.$$

Analog în $x \cdot a = y \cdot a$ înmulţind la dreapta cu a' rezultă $x = y$, deci a este regular.

4^0. Fie A finit şi anume $A = \{a_1, ..., a_n\}$ şi elementul $a_i \in A$, fixat. Aplicaţia $f : A \to a_i A$; $f(x) = a_i \cdot x$ este o injecţie deoarece din $f(x) = f(y) \Leftrightarrow a_i \cdot x = a_i \cdot y$, regularitatea lui a_i conduce la $x = y$. Întrucât mulţimea A este finită rezultă că f este şi surjecţie, deci există $x \in A$, fie acesta elementul

a_j, astfel că $f(a_j) = e$, de unde $a_i \cdot a_j = e$. Aplicaţia $g : A \to A \cdot a_j$ este de asemenea injecţie, deci şi surjecţie şi există $y \in A$ astfel încât $g(y) = e$. Fie $y = a_k$. Asociativitatea operaţiei n-are şi existenţa elementului neutru conduc, conform afirmaţiei 2^0, la $a_j = a_k$, deci există simetricul lui a_i . Observăm că în enunţul propoziţiei $1.1.7.4^0$ era suficient ca A să fie semigrup finit.

5^0. Deoarece $(ab)(b' \cdot a') \overset{as}{=} a \cdot (b \cdot b') \cdot a' = a \cdot e \cdot a' = a \cdot a' = e$, există $(ab)' = b'a'$. Asociativitatea permite definirea recursivă a puterilor naturale într-un semigrup şi ale celor întregi într-un grup.

1.1.8 Definiţii. 1^0. Dacă $(A, \cdot)$ este un semigrup şi $a \in A$ atunci $a^1 = a$ şi dacă pentru $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, a^{n-1} este definit, atunci $a^n \overset{def}{=} a^{n-1} \cdot a$.

2^0. Dacă $(A, \cdot)$ este un grup şi $a \in A$, atunci puterile lui a se extind şi la numere negative sau zero. Astfel $a^0 = e$, elementul neutru al grupului, $a^{-1} = a'$, simetricul său, iar pentru $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$; $a^{-n} \overset{def}{=} (a')^n = (a^n)'$.

Prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$ se demonstrează regulile de calcul cu puteri:

1.1.9 Propoziţie. *Într-un semigrup $(A, \cdot)$ avem:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ (a^m)^n = a^{mn},\ \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

relaţii ce se extind şi pentru puteri întregi negative într-un grup. După cum am văzut *numim grup perechea $(A, \cdot)$ unde " $\cdot$ " este o operaţie binară definită pe A, asociativă, cu element neutru, astfel încât orice element este simetrizabil.* O altă definiţie echivalentă cu aceasta este dată de următoarea teoremă:

1.1.10 Teoremă. *Semigrupul $(A, \cdot)$ este grup dacă şi numai dacă ecuaţiile $a \cdot x = b$ şi $y \cdot a = b$ au soluţii unice în A pentru orice $a, b \in A$.*

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Dacă $(A, \cdot)$ este grup atunci există simetricul lui a notat a' şi înmulţind, la stânga respectiv la dreapta, cu a' cele două ecuaţii obţinem:

$$a' \cdot (a \cdot x) = a' \cdot b \overset{as}{\Rightarrow} (a' \cdot a) \cdot x = a'b \overset{Ne}{\Rightarrow} x = a' \cdot b \in A$$

şi analog $y = b \cdot a'$, soluţii unice în A.

" $\Leftarrow$ " Dacă orice ecuaţii de tipul din enunţ au soluţii unice în A, atunci ecuaţia $a \cdot x = a$ are soluţia $x = e_a$, deci $a \cdot e_a = a$. Observăm că oricare ar fi $b \in A$ avem $b \cdot e_a = b$. Într-adevăr

$$b \cdot e_a \overset{\text{ipoteza}}{=} (y \cdot a) \cdot e_a \overset{As}{=} y \cdot (a \cdot e_a) = y \cdot a \overset{\text{ipoteza}}{=} b.$$

Prin urmare

$$\exists e \in A,\ \forall x \in A;\ x \cdot e = x. \tag{1.1}$$

Analog, fie $e_a^{'}$ soluţia ecuaţiei $x \cdot e = x$. Se demonstrează că $e_a^{'} \cdot b = b$ pentru orice $b \in A$ (utilizând existenţa soluţiei ecuaţiei $x \cdot a = b$). Prin urmare

$$\exists e' \in A,\ \forall x \in A;\ e' \cdot x = x. \tag{1.2}$$

Din (1) şi (2) rezultă $e = e' \cdot e = e'$, deci semigrupul are element neutru. Fie acum a' soluţia ecuaţiei $a \cdot x = e$ şi a'' soluţia ecuaţiei $y \cdot a = e$. Cele două soluţii coincid, deoarece $a' = e \cdot a' = (a'' \cdot a) \cdot a' = a''(a \cdot a') = a'' \cdot e = a''$, deci $(A, \cdot)$ este grup.

1.1.11 Exemple. a) $(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{N}, \cdot)$; $(\mathbb{Q}, \cdot)$ $(\mathbb{R}, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}, \cdot)$ sunt monoizi comutativi fără a fi grupuri.

b) $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{C}, +)$ $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sunt grupuri comutative.

c) Fie M o mulţime şi $M^M = \{f\, ;\ f : M \to M\}$, mulţimea aplicaţiilor mulţimii M în ea însăşi. Perechea $(M^M, \circ)$ este un monoid în raport cu compunerea funcţiilor, având ca element neutru aplicaţia identică. Grupul elementelor simetrizabile ale monoidului este $U(M^M, \circ) = \{f \in M^M;\ f \text{ bijecţie}\}$. Deoarece o bijecţie $f : M \to M$ se numeşte permutare, grupul $U(M^M, \circ)$ este grupul permutărilor lui M numit şi grupul simetric al lui M, notat S_M. Dacă M este mulţimea finită cu n elemente, atunci S_M se notează S_n şi se numeşte grupul simetric de ordinul n. Dacă $n \geq 3$, atunci $(S_n, \circ)$ este grup necomutativ.

1.2 Subgrupuri ale unui grup

1.2.1 Definiţie. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Submulţimea $H \subseteq G$ se numeşte **subgrup al grupului** $(G, \cdot)$ dacă H împreună cu operaţia indusă din G pe elementele lui H este grup. Notăm $H \leq G$, iar prin $\mathcal{S}\ (G)$ mulţimea tuturor subgrupurilor lui G, deci $\mathcal{S}(G) = \{H;\ H \leq G\}$.

1.2.2 Observaţii. 1^0. $G \leq G$ şi $\{e\} \leq G$ unde e este elementul neutru al grupului G. Aceste două subgrupuri se numesc **improprii** spre deosebire de toate celelalte care se vor numi **proprii;**

2^0. Dacă $H \leq G$, atunci $e \in H$, deci $H \neq \emptyset$. Prin urmare submulţimea suport a unui subgrup este în mod necesar **nevidă**;

3^0. Dacă $H \leq G$ şi $G \leq H$ atunci $H = G$;

4^0. Dacă $H \leq H'$ şi $H' \leq H''$ atunci $H \leq H''$;

5^0. Din 1^0, 3^0 şi 4^0 rezultă că relaţia "**este subgrup al lui**" este **o relaţie de ordine în mulţimea** $\mathcal{S}\ (\boldsymbol{G})$.

Următoarea propoziţie ne dă două definiţii echivalente cu definiţia 1.2.1 a subgrupului unui grup, cu care se operează mai uşor în aplicaţii:

1.2.3 Teorema de caracterizare a subgrupurilor unui grup. *Dacă* $(G,\cdot)$ *este un grup şi H o submulţime a lui G, atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:*

1^0. $H \leq G$ *(H este subgrup al lui G);*

2^0. $H \neq \emptyset,\ \forall x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$ şi $\forall x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$;

3^0. $H \neq \emptyset,\ \forall x, y \in H \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H$.

Demonstraţie. Implicaţiile $1^0 \Rightarrow 2^0$ şi 3^0 sunt evidente.

$2^0 \Rightarrow 3^0$ deoarece $y \in H \Rightarrow y^{-1} \in H$ şi cum $x \in H$ avem $x \cdot y^{-1} \in H$.

$3^0 \Rightarrow 2^0$ întrucât $H \neq \emptyset$ implică că există $x \in H$ şi deci $e = x \cdot x^{-1} \in H$. Pentru $x = e$ şi $\forall y \in H$ rezultă că $e \cdot y^{-1} \in H$, deci $y^{-1} \in H$. Dacă $x, y \in H$, atunci şi $y^{-1} \in H$ şi avem $x \cdot y = x \cdot (y^{-1})^{-1} \in H$.

$2^0 \Rightarrow 1^0$ deoarece H este parte stabilă a lui G, iar asociativitatea operaţiei din G este o proprietate ereditară şi cum $e = x \cdot x^{-1}$ pentru $x \in H$, deducem că $e \in H$. Existenţa lui x^{-1} şi apartenenţa sa la H pentru orice $x \in H$ este asigurată din enunţul afirmaţiei 2^0.

1.2.4 Observaţie. În cazul unui grup notat aditiv $(G, +)$, submulţimea nevidă $H \leq G$ este subgrup al lui G dacă şi numai dacă:

1^0. $\forall x, y \in H \Rightarrow x + y \in H$ şi $-x \in H$;

respectiv

2^0. $\forall x, y \in H \Rightarrow x + (-y) \in H$.

1.2.5 Exemple. 1^0 *Subgrupurile grupului aditiv al întregilor* $\mathbb{Z}$ *sunt de forma* $n\mathbb{Z}$*, unde* $n \in \mathbb{N}$. Fie $(\mathbb{Z}, +)$ grupul aditiv al numerelor întregi şi $n \in \mathbb{N}$ fixat. Notăm prin $n\mathbb{Z}$ mulţimea tuturor multiplilor lui n, deci $n\mathbb{Z} = \{kn;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Observăm că $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$ şi $\forall k_1 n,\ k_2 n \in n\mathbb{Z}$ avem $k_1 n + (-k_2 n) = (k_1 - k_2)n \in n\mathbb{Z}$, deoarece $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$. Aceasta demonstrează că $n\mathbb{Z}$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$. În particular, pentru $n = 0$ obţinem subgrupul impropriu format din elementul neutru (cel nul), deci $0\mathbb{Z} = \{0\}$, iar pentru $n = 1$ obţinem grupul $\mathbb{Z}$. Se poate demonstra că $(\mathbb{Z}, +)$ nu are alt fel de subgrupuri, adică *dacă* $H \leq \mathbb{Z}$ *atunci există* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $n\mathbb{Z} = H$. Într-adevăr, dacă $H \leq \mathbb{Z}$ şi $H = \{0\}$ atunci $H = 0\mathbb{Z}$. Dacă $H \neq \{0\}$ atunci $H \setminus \{0\} \neq \emptyset$ şi întrucât mulţimea numerelor naturale este bineordonată, în submulţimea nevidă $(H \setminus \{0\} \cap \mathbb{N})$ există un cel mai mic element, fie acesta n. Deoarece $n \neq 0$, atunci pentru orice $x \in H$, aplicând teorema împărţirii cu rest, există un cât q şi un rest r, unici, astfel încât $x = qn + r$ cu $0 \leq r < n$. Dar $x, n \in H$ implică $qn \in H$ şi $r = x + (-qn) \in H$. Deoarece r este mai mic decât n şi n este minim cu proprietatea că este natural nenul din H, rezultă că nu e posibil decât $r = 0$. De aici $x = qn$, adică $H \subseteq n\mathbb{Z}$. Incluziunea inversă este imediată, deci $H = n\mathbb{Z}$.

2^0 *Mulţimea elementelor unui grup, care comută cu orice element al grupului formează un subgrup al acelui grup, numit centrul grupului, notat* $Z(G)$. Într-adevăr, prin definiţie

$$Z(G) = \{z \in G;\ zx = xz;\ \forall x \in G\}.$$

Deoarece $ex = xe = x,\ \forall x \in G$, avem $e \in Z(G)$, deci $Z(G) \neq \emptyset$. Mai mult, oricare ar fi $z_1, z_2 \in Z(G)$ avem $z_1 z_2^{-1} \in Z(G)$ deoarece

$$\left(z_1 z_2^{-1}\right) x = z_1 \left(z_2^{-1} x\right) = z_1 \left(x^{-1} z_2\right)^{-1} =$$

$$= z_1 \left(z_2 x^{-1}\right)^{-1} = z_1 \left((x^{-1})^{-1} z_2^{-1}\right) = z_1 \left(x z_2^{-1}\right) =$$
$$= \left(z_1 x\right) z_2^{-1} = \left(x z_1\right) z_2^{-1} = x \left(z_1 z_2^{-1}\right).$$

1.2.6 Propoziţie. *Intersecţia a două subgrupuri ale unui grup este subgrup al acelui grup. Mai general, intersecţia unei familii $(S_i)_{i\in I}$ de subgrupuri ale unui grup este un subgrup a acelui grup, adică:*

$$S_i \leq G;\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} S_i \leq G.$$

Demonstraţie. Fie S_1, S_2 subgrupuri ale lui G. Cum elementul neutru a lui G aparţine atât lui S_1 cât şi lui S_2 rezultă că $e \in S_1 \cap S_2$, deci $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Pentru orice $x, y \in S_1 \cap S_2$ avem $x, y \in S_1$ şi $x, y \in S_2$, de unde conform propoziţiei $1.2.3.3^0$ rezultă că $x \cdot y^{-1} \in S_1$ şi $x \cdot y^{-1} \in S_2$, deci $x \cdot y^{-1} \in S_1 \cap S_2$. Aceasta demonstrează că $S_1 \cap S_2 \leq G$.

1.2.7 Exemplu. Subgrupurile $12\mathbb{Z}$ şi $18\mathbb{Z}$ ale grupului aditiv al numerelor întregi au intersecţia $12\mathbb{Z}\cap 18\mathbb{Z} = 36\mathbb{Z}$ care este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$, dar reuniunea lor, $12\mathbb{Z}\cup 18\mathbb{Z}$, nu este subgrup a lui $\mathbb{Z}$ deoarece, spre exemplu, $12, 18 \in 12\mathbb{Z}\cup 18\mathbb{Z}$ dar $12 + 18 \notin 12\mathbb{Z}\cup 18\mathbb{Z}$. Se poate arăta că $m\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z}$ unde prin $[m, n]$ s-a notat cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale m şi n. În demonstraţie observăm mai întâi că $m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $n \mid m$.

1.2.8 Definiţii. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $X \subseteq G$ o submulţime a lui G. Prin **subgrupul generat de X** înţelegem cel mai mic subgrup al lui G care-l conţine pe X, adică tocmai intersecţia tuturor subgrupurilor lui G care-l conţin pe X. Notăm subgrupul generat de X prin $< X >$. Avem prin urmare:

$$< X >= \bigcap \{H;\ H \leq G;\ H \supseteq X\}.$$

Dacă mulţimea X conţine un singur element a, deci $X = \{a\}$ atunci subgrupul generat de $\{a\}$ se notează $< a >$ şi se numeşte **subgrupul ciclic generat de a**. Dacă grupul $G =< X >$ atunci spunem că X este **un sistem de generatori** pentru G.

1.2.9 Observaţie. Dacă $X = \emptyset$ atunci $< \emptyset >= \{e_G\}$, unde e_G este elementul neutru al grupului.

1.2.10 Exemplu. În grupul aditiv al numerelor întregi avem $< 12\mathbb{Z}\cup 18\mathbb{Z} >= 6\mathbb{Z}$. În general, $< m\mathbb{Z}\cup n\mathbb{Z} >= (m, n)\mathbb{Z}$, unde (m, n) este cel mai mare divizor comun al numerelor naturale m şi n. Verificarea acestui rezultat este un simplu exerciţiu.

1.2.11 Propoziţie. *Mulţimea subgrupurilor unui grup formează o latice (de fapt o latice completă) în raport cu incluziunea.*

Demonstraţie. Mulţimea $(\mathcal{S}(G), \subseteq)$ este o mulţime ordonată. Fie $S_1, S_2 \leq G$ subgrupuri ale lui G. Deoarece avem implicaţiile

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \cap S_2 \leq S_1 \\ S_1 \cap S_2 \leq S_2 \end{array}\right\} \wedge \forall H \left(\begin{array}{c} H \leq S_1 \\ H \leq S_2 \end{array} \mid\Rightarrow H \leq S_1 \cap S_2 \right),$$

rezultă că $S_1 \cap S_2 = \inf_{\mathcal{S}(G)}(S_1, S_2)$. Totodată conform definiţiei subgrupului generat de $S_1 \cup S_2$ avem:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \leq < S_1 \cup S_2 > \\ S_2 \leq < S_1 \cup S_2 > \end{array}\right\} \wedge \forall H \left(\begin{array}{c} S_1 \leq H \\ S_2 \leq H \end{array} \mid\Rightarrow < S_1 \cup S_2 > \leq H \right),$$

de unde rezultă $< S_1 \cup S_2 >= \sup_{\mathcal{S}(G)}(S_1, S_2)$. Remarcăm că această latice nu este o sublatice a părţilor grupului $(\mathcal{P}(G), \subseteq)$, deoarece deşi:

$$\inf_{\mathcal{P}(G)}(S_1 S_2) = S_1 \cap S_2 = \inf_{\mathcal{S}(G)}(S_1 S_2),$$

totuşi

$$\sup_{\mathcal{P}(G)}(S_1, S_2) = S_1 \cup S_2 \subseteq < S_1 \cup S_2 >= \sup_{\mathcal{S}(G)}(S_1 S_2).$$

Următoarea propoziţie ne dă un procedeu de construcţie a *subgrupului generat* de o submulţime a unui grup.

1.2.12 Propoziţie. *Dacă $(G, \cdot)$ este un grup şi $X \subseteq G$, atunci:*

$$< X >= \left\{x_1 x_2 ... x_n; n \in \mathbb{N}; x_i \in X \text{ sau } x_i^{-1} \in X;\ i = \overline{1, n}\right\}.$$

Demonstraţie. Notăm

$$S = \left\{x_1x_2...x_n; n \in \mathbb{N}; x_i \in X \text{ sau } x_i^{-1} \in X;\ i = \overline{1,n}\right\}.$$

Se verifică uşor că $S \leq G$ deoarece:

1) pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, dacă $x_1...x_n$ şi $x_{n+1}...x_{n+m} \in S$ atunci, conform legii asociativităţii generalizate, avem produsul lor $x_1...x_n...x_{n+m} \in S$ (parte stabilă);

2) $(x_1...x_n)^{-1} = x_n^{-1}x_{n-1}^{-1}...x_1^{-1} \in S$, iar

3) pentru $n = 0$ conform definiţiei operaţiei nulare produsul $x_1...x_n$ este elementul unitate al grupului.

Subgrupul S conţine pe X deoarece pentru $\forall x \in X$ produsul unar $(n = 1)$ aparţine lui S, $x_1 = x$, deci $x \in S$.

Pe de altă parte, oricare ar fi $H \leq G$ astfel încât $X \subseteq H$, pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $x_i \in X;\ i = \overline{1,n}$ avem $x_1x_2...x_n \in H$ şi de asemenea dacă $x_i^{-1} \in X$. Deci orice produs n-ar cu factorii x_i din X sau inversul $x_i^{-1} \in X$ aparţine lui H, ceea ce arată că $S \subseteq H$. Am demonstrat astfel că S este cel mai mic subgrup al lui G care-l conţine pe X, deci $S =< X >$.

1.2.13 Observaţii. 1^0. Dacă elementele mulţimii X comută două câte două într-un produs, atunci factorii de acelaşi fel conduc la puteri întregi, adică

$$< X >= \left\{x_1^{k_1}...x_n^{k_n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N};\ k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z};\ x_i \in X\ ; i = \overline{1,n}\ \right\}.$$

Evident $< X >$ este grup abelian.

În particular, dacă $X = \{a_1, ..., a_m\}$ este o mulţime finită şi elementele comută între ele, atunci subgrup generat de ele este

$$< a_1, ..., a_m >= \left\{a_1^{k_1}...a_m^{k_m};\ k_1, ..., k_m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2^0. Dacă $x = \{a\}$, atunci grupul abelian generat de a, numit **ciclic,** este format din puterile întregi ale lui a

$$< a >= \left\{a^k; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Distingem două cazuri: grupul ciclic este **infinit** dacă toate puterile lui a sunt distincte, respectiv **finit** dacă $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^p = a^q$.

Exemplul $1.2.5.1^0$ ne arată că orice subgrup al grupului aditiv al întregilor este ciclic şi anume $n\mathbb{Z} =< n >$, unde $n \in \mathbb{N}$.

3^0. În cazul notaţiei aditive, dacă $(G, +)$ este un grup şi $X \subseteq G$, atunci:

$$< X >= \left\{x_1 + x_2 + ... + x_n;\ n \in \mathbb{N};\ x_i \in X \text{ sau } -x_i \in X; i = \overline{1,n}\ \right\}.$$

Dacă $X = \{a\}$ atunci $< a >= \{ka; k \in \mathbb{Z}\}$.

1.2.14 Exemple. 1^0. Pentru grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$, subgrupul generat de $X = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ este:

$$< \sqrt{2}, \sqrt{3} >= \left\{k_1\sqrt{2} + k_2\sqrt{3};\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2^0. Pentru grupul multiplicativ al numerelor complexe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, subgrupul generat de $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ este

$$< \varepsilon >= \left\{\varepsilon^k; k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}\right\}$$

deoarece $\varepsilon^n = 1$. Acesta este subgrupul ciclic al rădăcinilor de ordinul n al unităţii, numit şi **grupul unităţilor de ordinul n**, notat de obicei prin U_n.

1.3 Ordinul unui grup şi al unui element al grupului. Grupuri ciclice.

1.3.1 Definiţii. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Prin **ordinul** său notat ord$G$ înţelegem cardinalul mulţimii G, deci ord$G = |\, G\,|$.

Fie $a \in G$. Prin **ordinul elementului** a înţelegem cel mai mic număr natural nenul $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^n = e$, unde e este elementul neutru al grupului. Scriem ord$a = n$. Dacă nu există $n \in \mathbb{N}^*$ cu această proprietate, adică $a^n \neq e\,, \forall n \in \mathbb{N}^*$ atunci spunem că ordinul lui a în grupul G este infinit şi scriem ord $a = \infty$.

Propoziţia de mai jos demonstrează că ordinul unui element coincide cu ordinul grupului ciclic generat de a, deci **ord**a =**ord**$< a >$.

1.3.2. Propoziţie. *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup multiplicativ,* $a \in G$ *şi* 1 *elementul neutru al grupului:*

1^0. *dacă ordinul lui* a *este infinit atunci* $a^k = 1 \Leftrightarrow k = 0$*;*

2^0. *dacă* ord$a = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci* $< a >= \{a^k;\ k = 0, 1, ..., n-1\}$.

3^0. *dacă* ord$a = \infty$*, atunci* $i, j \in \mathbb{Z}; i \neq j \Rightarrow a^i \neq a^j$ *şi prin urmare,* $< a >$ *este grup ciclic infinit.*

Demonstraţie. 1^0. Dacă $a^k = 1$ şi $k \neq 0$ atunci, $a^{km} = 1$ pentru orice $m \in \mathbb{Z}^*$. Fie $n = \min\{m \in \mathbb{N}^*,\ a^{km} = 1\}$. Avem atunci: $< a >= \{a^0 = 1, a^1, ..., a^{n-1}\}$, deci ord$< a >$ este finit, contradicţie. Dacă $k = 0$, atunci evident $a^0 = 1$.

2^0. Dacă ord $a = n$, fie $H = \{a^k;\ k = 0, 1, ..., n-1\}$. Evident $H \subseteq < a >= \{a^k; k \in \mathbb{Z}\}$. Deoarece ord$< a >= n$, elementele lui H sunt două câte două distincte. Într-adevăr, dacă există $i, j \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq i < j < n$ astfel încât $a^i = a^j$, atunci înmulţind egalitatea cu a^{-i} avem $a^{j-i} = 1$ şi cum $0 \leq i < j < n$ aceasta contrazice minimalitatea lui n din definiţia ordinului lui a. Deci H are efectiv n elemente.

Pentru orice element $a^k \in < a >$ avem $a^k \in H$ deoarece aplicând lui $k \in \mathbb{Z}$ teorema împărţirii cu rest prin n, există $q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încât $k = q \cdot n + r$ cu $0 \leq r < n$. De aici avem $a^k = (a^n)^q \cdot a^r = 1 \cdot a^r \in H$.

Am demonstrat astfel că $< a > \subseteq H$ şi cum $H \subseteq < a >$ rezultă $< a >= H = \left\{a^0, a^1, ..., a^{n-1}\right\}$.

3^0. Presupunem că $a^i = a^j$ pentru anumiţi $i, j \in \mathbb{Z}$ şi $i < j$. Atunci $a^{j-i} = 1$ şi cum ord$a = \infty$ rezultă $j - i = 0$, contradicţie.

1.3.3 Observaţie. În cazul unui grup notat aditiv $(G, +)$ ordinul lui $a \in G$ se defineşte ca cel mai mic număr natural nenul n astfel încât $na = 0$ unde $na = a + ... + a$, însumarea lui a efectuându-se de n ori.

1.3.4 Exemple. 1^0. În $(\mathbb{C}, \cdot)$ elementul i are ordinul 4 deoarece $< i >= \left\{i; i^2 = -1; i^3 = -1; i^4 = 1\right\}$, iar elementul $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ are ordinul n întrucât $< \varepsilon >= \left\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}\right\}$. Tot în acest grup elementul 1 are ordinul 1, iar -1 are ordinul doi, $< -1 >= \{-1, 1\}$. Elementul 2 are ordinul infinit deoarece $2^k = 1 \Leftrightarrow k = 0$.

2^0. În $(\mathbb{R}, +)$ elementul 1 are ordin infinit deoarece $n1 = 0 \Leftrightarrow n = 0$. Evident $< 1 >= \mathbb{Z}$ şi ordinul grupului $(\mathbb{Z}, +)$ este infinit, $|\mathbb{Z}| = \chi_0$.

3^0. În grupul aditiv al claselor de resturi modulo n, $(\mathbb{Z}_n, +)$, unde $\mathbb{Z}_n = \left\{\widehat{0}, \widehat{1}, ..., \widehat{n-1}\right\}$ avem $\mathbb{Z}_n = \left\{k \cdot \widehat{1}; k \in \mathbb{Z}\right\} =< \widehat{1} >$, deci acest grup este ciclic şi ord $< \widehat{1} >= n$. Dacă n este număr compus şi m divide pe n, atunci există $k \in \mathbb{N}$ astfel că $n = mk$, iar ordinul lui $\widehat{m}$ este k deoarece $\widehat{m} \cdot k = \widehat{0}$. Spre exemplu, în $\mathbb{Z}_{12}$ avem: ord$\widehat{0} = 1$; ord$\widehat{6} = 2$; ord$\widehat{4}$ =ord$\widehat{8} = 3$; ord$\widehat{3}$ =ord$\widehat{9} = 4$; ord$\widehat{2}$ =ord$\widehat{10} = 6$ şi ord$\widehat{1}$ =ord$\widehat{5}$ =ord$\widehat{7}$ =ord$\widehat{11} = 12$. Mai mult, $\mathbb{Z}_{12} =< \widehat{1} >=< \widehat{5} >=< \widehat{7} >=< \widehat{11} >$.

1.3.5 Propoziţie. *Dacă* $(G, \cdot)$ *este un grup, atunci*:

1^0. *unicul element de ordin* 1 *în* G *este elementul său neutru* e;

2^0. $(\forall) x \in G$, ordx^{-1} =ord$x$;

3^0. *dacă* $x \in G$, iar ord$x = n$ şi $m \in \mathbb{N}$*, atunci* $x^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$.

Demonstraţie. Afirmaţia 1^0 este evidentă.

2^0. Fie $n \in \mathbb{N}$. Pentru orice $x \in G$ avem $(x^{-1})^n = e \Leftrightarrow x^{-n} = e \Leftrightarrow x^n = e^{-1} = e$. De aici rezultă că ord$x^{-1}$ =ord$x$, cu precizarea că dacă ordinul lui x este infinit atunci şi ordinul lui x^{-1} este infinit şi reciproc.

3^0. Dacă $x^m = e$ şi ord$x = n$, atunci conform teoremei împărţirii cu rest există şi sunt unici $q, r \in \mathbb{N}$

astfel încât $m = nq + r; 0 \leq r < n$. De aici

$$x^r = x^{m-nq} = x^m \cdot (x^n)^{-q} = e,$$

de unde, cum $r < n$ şi ord$x = n$ rezultă că $r = 0$, deci $m = nq$ şi ord$n \mid m$. Reciproc, dacă $n \mid m$ atunci există $q \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = nq$ şi

$$x^m = x^{nq} = (x^n)^{-q} = e^q = e.$$

1.3.6 Propoziţie. *Orice subgrup al unui grup ciclic este ciclic.*

Demonstraţie. Fie $(G, \cdot)$ un grup ciclic generat de elementul a, deci $G =< a >$ şi $H \leq G$. Dacă $H = \{e\}$, atunci $H =< e >$ este ciclic. Presupunem în continuare că $H \neq \{e\}$. Atunci H conţine puteri pozitive ale lui a deoarece dacă $k < 0$ şi $a^k \in H$, atunci şi $(a^k)^{-1} = a^{-k} \in H$ unde $-k \in \mathbb{N}$. Alegem $n = \min\{k \in \mathbb{N}^*, a^k \in H\}$ şi demonstrăm că $H =< a^n >$. Într-adevăr, deoarece $a^n \in H$ avem $< a^n >\subseteq H$.

Pentru a demonstra incluziunea inversă, observăm că dacă $a^m \in H$ pentru un anumit $m \in \mathbb{Z}$, atunci aplicând teorema împărţirii cu rest există şi sunt unici $q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m = nq + r$, $0 \leq r < n$. De aici avem

$$a^r = a^{m-nq} = a^m \cdot (a^n)^{-q} \in H,$$

deoarece $a^m, a^n \in H$. Din alegerea lui n şi faptul că $0 \leq r < n$ rezultă $r = 0$, de unde avem $a^m \cdot (a^n)^{-q} = e$, deci $a^m = (a^n)^q \in< a^n >$.

1.3.7 Propoziţie. *Dacă* $(G, \cdot)$ *este un grup ciclic finit de ordinul* n *şi* $G =< a >$, *atunci* $G =< a^k >, k \in \mathbb{N}$ *dacă şi numai dacă* $(n, k) = 1$.

Demonstraţie. Presupunem că $G =< a >=< a^k >$ şi $(n, k) = d \neq 1$. Prin urmare există numerele naturale $n', k' \in \mathbb{N}, (n', k') = 1$, astfel încât $n = n'd$ şi $k = k'd$. Atunci $(a^k)^{n'} = (a^{k'd})^{n'} = (a^{dn'})^{k'} = (a^n)^{k'} = e^{k'} = e$. De aici ord$a^k \leq n' < n$ ceea ce conduce la $\left|< a^k >\right|$ strict mai mic decât $|< a >|$, contradicţie, deci $(n, k) = 1$.

Reciproc, dacă $(n, k) = 1$ atunci există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel că $nu + kv = 1$, de unde $a = a^{nu+kv} = (a^n)^u \cdot (a^k)^v = (a^k)^v$, ceea ce demonstrează că $a \in< a^k >$ şi deci $G =< a >\subseteq< a^k >$. Incluziunea inversă fiind evidentă, avem $< a >=< a^k >$.

1.4 Relaţii de echivalenţă induse de un subgrup pe elementele unui grup

Fie $(G, \cdot)$ un grup şi H un subgrup al său ($H \leq G$) cu ajutorul căruia definim următoarele două relaţii pe G:

$$x \rho_H\, y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H; \tag{1}$$

$$x \rho'_H\, y \Leftrightarrow y \cdot x^{-1} \in H. \tag{2}$$

În particular, pentru $H = \{e\}$, elementul neutru în G, avem $x\ \rho_{\{e\}}\ y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y = e$ deci $y = x$, adică $\rho_{\{e\}}$ şi la fel $\rho'_{\{e\}}$ sunt tocmai relaţia de egalitate pe G.

Dacă $H = G$, atunci $\rho_G = \rho'_G$ reprezintă relaţia universală pe G.

1.4.1 Propoziţie. *Relaţiile* ρ_H *şi* ρ'_H *anterior definite sunt relaţii de echivalenţă pe* G.

Demonstraţie. Relaţia ρ_H este reflexivă deoarece $\forall x \in G$ avem $x^{-1} \cdot x = e_G \in H$ deci $x \rho_H x$. Totodată ρ_H este relaţie simetrică întrucât dacă $x \rho_H y$, deci $x^{-1} y \in H$, atunci, deoarece H este subgrup al lui G rezultă că $\left(x^{-1} y\right)^{-1} \in H$. Cum $\left(x^{-1} y\right)^{-1} = y^{-1}(x^{-1})^{-1} = y^{-1} x$ avem $y^{-1} \cdot x \in H$, adică $y \rho_H x$. De asemenea din $x \rho_H y$ şi $y \rho_H z \Leftrightarrow x^{-1} y \in H$ şi $y^{-1} \cdot z \in H$. Întrucât H este parte stabilă a lui G, rezultă $(x^{-1} y)(y^{-1} z) \in H$. Conform asociativităţii operaţiei binare de grup şi existenţei elementului neutru avem $x^{-1}(y \cdot y^{-1}) \cdot z = x^{-1} \cdot z \in H$. Aceasta demonstrează că $x \rho_H z$, deci relaţia ρ_H este tranzitivă. Prin urmare ρ_H este o relaţie de echivalenţă pe G.

Analog se verifică că ρ'_H este de asemenea o relaţie de echivalenţă pe G.

1.4.2 Teoremă. *Dacă $(G, \cdot)$ este grup şi $H \leq G$, atunci relaţiile ρ_H şi ρ'_H determină două partiţii ale lui G în clase de echivalenţă de forma xH respectiv Hx cu $x \in G$, toate clasele fiind echipotente (deci de acelaşi cardinal) cu H, iar mulţimile factor*

$$G/\rho'_H = \{xH, x \in G\} \text{ şi } G/\rho'_H = \{Hx\,,\, x \in G\}$$

au de asemenea acelaşi cardinal.

Demonstraţie. Prin definiţie clasa de echivalenţă în raport cu ρ_H având reprezentantul x este

$$\rho_H < x >= \{y \in G; x\rho_H y\} = \{y \in G; x^{-1}y \in H\} = \{y \in G; y \in xH\} = xH$$

Analog se arată că $\rho'_H < x >= Hx$.

Aplicaţia $f_x : H \to xH; f_x(h) = xh$ este injectivă deoarece dacă $f_x(h_1) = f_x(h_2)$, deci $xh_1 = xh_2$, înmulţind la stânga această egalitate cu x^{-1} obţinem $h_1 = h_2$. De asemenea aplicaţia este surjectivă. Din bijectivitatea lui f_x rezultă egalitatea cardinalilor $|H| = |xH|$ pentru orice $x \in G$. Analog se demonstrează că $|H| = |Hx|$, $\forall\, x \in G$.

Fie $g : G/\rho_H \to G/\rho'_H$; $g(xH) = Hx^{-1}$. Aplicaţia g este bine definită deoarece nu depinde de alegerea reprezentanţilor. Într-adevăr dacă $xH = yH$, atunci $(xH)^{-1} = (yH)^{-1}$ deci $H^{-1} \cdot x^{-1} = H^{-1} \cdot y^{-1}$ şi, cum H este subgrup avem $H^{-1} = H$. Rezultă de aici $Hx^{-1} = Hy^{-1}$, adică $g(xH) = g(yH)$.

Analog, aplicaţia $g' : G/\rho'_H \to G/\rho_H$; $g'(Hx) = x^{-1}H$ este bine definită.

Întrucât

$$(g' \circ g)(xH) = g'(g(xH)) = g'(Hx^{-1}) = (x^{-1})^{-1}H = xH$$

şi

$$(g \circ g')(Hx) = Hx\,,\ \forall\, x \in G,$$

rezultă că g este inversabilă, $g' = g^{-1}$ şi g este bijecţie. Aceasta ne arată că mulţimile factor de mai sus sunt echipotente, deci au acelaşi cardinal $|G/\rho_H| = |G/\rho'_H|$.

1.4.3 Definiţie. Dacă $(G, \cdot)$ este un grup şi $H \leq G$ un subgrup al său, atunci cardinalul mulţimii factor G/ρ_H se numeşte **indicele lui *H* în *G*** şi se notează $|G : H|$.

Observăm că, în particular, $|G : \{e\}| = |G|$ şi $|G : G| = 1$.

1.4.4 Teorema lui Lagrange. *Dacă H este un subgrup al lui G atunci $|G| = |G : H| \cdot |H|$.*

Demonstraţie. Fie $x_i \in G; i \in I$ un sistem de reprezentanţi pentru mulţimea factor G/ρ_H. Deci $|I| = |G/\rho_H| = |G : H|$. Cum $G/\rho_H = \{x_iH;\, i \in I\}$, din definiţia partiţiei unei mulţimi în clase de echivalenţă rezultă că $G = \bigcup\limits_{i \in I} x_iH$ şi toate clasele x_iH sunt două câte două disjuncte. Aceasta împreună cu definiţia adunării cardinalilor şi cu faptul că toate clasele au acelaşi cardinal, $|H|$, iar numărul claselor este $|G : H|$ conduce la

$$|G| = \sum_{i \in I} |x_iH| = \sum_{i \in I} |H| = |I| \cdot |H| = |G : H| \cdot |H|\,.$$

1.4.5 Corolare. 1^0. *Într-un grup finit ordinul fiecărui subgrup şi indicele lui divid ordinul grupului, adică $|H| \mid |G|$ şi $|G : H| \mid |G|$.*

2^0. *Ordinul fiecărui element al grupului divide ordinul grupului.*

Într-adevăr, dacă $\operatorname{ord} x = m$, adică $x^m = e$ şi m este un minim cu această proprietate, atunci subgrupul ciclic generat de x este $< x >= \{e, x, \ldots, x^{m-1}\}$ deci $|< x >| = m$. Corolarul 1^0 aplicat acestui subgrup conduce la $m \mid |G|$.

3^0. *Un grup de ordin prim nu are subgrupuri proprii, el este ciclic.*

Într-adevăr, din $|G| =$ număr prim şi corolarele 2^0 şi 1^0 rezultă că G este generat de orice element al său diferit de elementul neutru, deci $G =< x >;\ x \in G \setminus \{e\}$.

Observăm că, în general, fiind dat un subgrup $H \leq G$, clasele $xH \neq Hx$ şi deci $G/\rho_H \neq G/\rho'_H$.

1.4.6 Exemplu. Fie $(S_3, \circ)$ grupul permutărilor de trei elemente,

$$S_3 = \{e, (12); (13); (23); (231); (312)\},$$

unde

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix};(12)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix};(13)=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix};$$

$$(23)=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix};\ (231)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\ \text{şi}\ (321)=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

Fie subgrupul $H=\{e;(12)\}$. Pentru $x=(13)$ spre exemplu avem

$$xH=\{(13);(231)\}$$

$$Hx=\{(13);(321)\},$$

iar

$$G/\rho_H=\{H,\{(13);(231)\}.\{(23);(321)\}\}$$

$$G/\rho'_H=\{H,((13);(321)\},\{(23);(231)\}\}.$$

1.4.7. Aplicaţie. Fie G un grup şi $x\in G$; ord$x=n$ Demonstraţi că pentru orice $k\in\mathbb{Z}$; ordx^k divide ordinul lui x

Soluţie. Deoarece $x^k\in<x>$, subgrupul ciclic generat de x, şi ordinul unui element al grupului divide ordinul grupului, rezultă că ordx^k divide pe $|<x>|$. Dar $|<x>|=$ord$x=n$, de unde avem ordx^k divide ord$x=n$.

1.5 Subgrupuri normale

Întrebarea, în ce caz clasele de echivalenţă având acelaşi reprezentant, în raport cu cele două relaţii de echivalenţă ale unui grup ρ_H şi ρ'_H induse de un subgrup H, ne conduce la un tip special de subgrupuri, numit subgrupuri normale. În acest caz avem

$$(xH=Hx,\quad\forall x\in G)\Leftrightarrow(G/\rho_H=G/\rho'_H)\Leftrightarrow(\rho_H=\rho'_H).$$

1.5.1 Definiţie. Dacă $(G,\cdot)$ este un grup, subgrupul $N\leq G$ se numeşte **normal** (sau **invariant** sau **divizor normal al lui G**) dacă

$$xN=Nx;\ \ \forall x\in G.$$

Notăm $N\trianglelefteq G$.

1.5.2 Exemple. 1^0. Orice subgrup al unui grup abelian este normal;

2^0. Grupul însuşi şi subgrupul format doar din elementul neutru al grupului sunt subgrupuri normale (improprii);

3^0. Centru $Z(G)$ al unui grup $(G,\cdot)$ este subgrup normal.

Într-adevăr deoarece $Z(G)\overset{def}{=\!=}\{z\in G;xz=zx;x\in G\}$ este subgrup al lui G (vezi exemplu 1.2.5.2^0) şi $xZ(G)=Z(G)x$ pentru orice $x\in G$.

4^0. Dacă $H\leq G$ şi $|G:H|=2$ atunci $H\trianglelefteq G$.

Într-adevăr din $|G:H|=2$ rezultă $G/\rho_H=\{H,G\setminus H\}=G/\rho'_H$.

Următoarea teoremă dă mai multe caracterizări ale subgrupurilor normale, utile în aplicaţii.

1.5.3 Teoremă. *Dacă $(G,\cdot)$ este un grup şi $N\leq G$ un subgrup al său, atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:*

1^0. $N\trianglelefteq G$;

2^0. $\rho_N=\rho'_N$;

3^0. $G/\rho_N=G/\rho'_N\overset{notat}{=}G/N$;

4^0. $\forall\,x\in G,\forall n\in N\ \exists n'\in N;\ xn=n'x$;

5^0. $\forall x\in G,\ \forall n\in N;\ x^{-1}nx\in N$;

6^0. $\forall x\in G,\ x^{-1}Nx\subseteq N$;

7^0. $\forall x\in G,\ x^{-1}Nx=N$.

Demonstraţie. Primele trei echivalenţe sunt evidente conform Teoremei 1.4.2. Observăm că $\rho_N=\rho'_N$ dacă şi numai dacă $\rho_N<x>=\rho'_N<x>$ adică $x\cdot N=N\cdot x$, $\forall x\in G$, ceea ce este

echivalent cu aceea că $\forall x \in G$ şi $\forall n \in N$ există $n' \in N$ astfel încât $x \cdot n' = n \cdot x$. De aici înmulţind ultima egalitate cu x^{-1} obţinem $x^{-1}nx = n'$, deci $x^{-1}nx \in N$ şi totodată $x^{-1}Nx \subseteq N$.

De asemenea avem $x^{-1}Nx = N$ şi implicaţiile inverse.

1.5.4 Propoziţie. *Intersecţia oricărei familii de subgrupuri normale ale unui grup este subgrup normal al acelui grup.*

Demonstraţie. Fie $N_i \trianglelefteq G;\ i \in I$ o familie de subgrupuri normale ale grupului G şi $N = \bigcap\limits_{i \in I} N_i$. S-a demonstrat în paragraful 1.2 că intersecţia oricărei familii de subgrupuri ale unui grup este subgrup al acelui grup. Totodată, cum N_i este subgrup normal al lui G, pentru orice $x \in G$ şi pentru orice $n \in \bigcap\limits_{i \in I} N_i$ avem $n \in N_i$ şi $x^{-1}nx \in N_i$, oricare ar fi $i \in I$. Atunci $x^{-1}nx \in \bigcap\limits_{i \in I} N_i = N$.

Se demonstrează uşor afirmaţia

1.5.5 Propoziţie. *Dacă H_1, H_2 sunt subgrupuri ale grupului $(G, \cdot)$, atunci mulţimea $H_1H_2 = \{h_1 \cdot h_2; h_i \in H_i; i = 1, 2\}$ este subgrup al lui G dacă şi numai dacă $H_1H_2 = H_2H_1$.*

1.5.6 Corolare. 1^0 *Dacă N_1, N_2 sunt subgrupuri normale ale lui G atunci N_1N_2 este de asemenea subgrup normal al lui G;*

2^0 *Dacă $N_1N_2 \trianglelefteq G$ atunci în mulţimea subgrupurilor normale ale lui G există* $\sup(N_1, N_2) = N_1N_2$;

3^0 $(\mathcal{S}_n(G), \subseteq)$, *mulţimea subgrupurilor normale ale lui G, împreună cu relaţia de incluziune formează o latice.*

1.6 Omomorfisme de grupuri

1.6.1 Definiţii. 1^0. Fie $(G, \cdot)$ şi $(G', *)$ două grupuri. Aplicaţia $f : G \to G'$ se numeşte **omomorfism de grupuri** dacă $\forall x, y \in G$ avem $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$.

Notăm prin Hom (G, G') mulţimea tuturor omomorfismelor de la G la G';

2^0. Omomorfismul $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$ se numeşte **izomorfism** dacă există omomorfismul $g : G' \to G$ astfel încât $g \circ f = id_G$ şi $f \circ g = id_{G'}$. Notăm izomorfismul grupurilor G şi G' prin $G \simeq G'$;

3^0. Un omomorfism de la G la G se numeşte **endomorfism**. Mulţimea endomorfismelor grupului G o vom nota prin End G;

4^0. Un izomorfism de la G la G se numeşte **automorfism**. Mulţimea automorfismelor grupului G o vom nota prin Aut G.

1.6.2 Exemple. 1. Incluziunea canonică a unui subgrup $S \leq G$, $i : S \to G;\ i\,(x) = x;\ \forall x \in S$, este un omomorfism injectiv de grupuri;

2. Aplicaţia identică a unui grup în el însuşi, $id_G : G \to G;\ id_G(x) = x$, este un automorfism al acelui grup;

3. Aplicaţia $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot);\ f(x) = e^x$ este un omomorfism de grupuri deoarece $\forall\ x, y \in G$ avem:

$$f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y);$$

4. Aplicaţia $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)\,; f(x) = nx$, unde $n \in \mathbb{N}$ este un număr natural fixat, este un endomorfism al lui $\mathbb{Z}$ deoarece:

$$f(x + y) = n(x + y) = nx + ny = f(x) + f(y).$$

5. Dacă $(G, \cdot)$ este un grup şi $a \in G$ este element fixat, atunci aplicaţia

$$i_a : (G, \cdot) \to (G, \cdot)\,;\ i_a(x) = a^{-1} \cdot x \cdot a$$

este un automorfism al lui G numit **automorfism interior**.
Într-adevăr, aplicaţia i_a este endomorfism al lui G, deoarece $\forall x, y \in G$

$$i_a(xy) = a^{-1}\,(xy)\,a = a^{-1}x(aa^{-1})ya = (a^{-1}xa)(a^{-1}xa) = i_a(x)i_a(y).$$

Mai mult, există $j_a : (G, \cdot) \to (G, \cdot)\,;\ j_a(x) = axa^{-1}$ de asemenea endomorfism al lui G, iar

$$i_a \circ j_a(x) = a^{-1}(axa^{-1})a = x = j_a \circ i_a(x) \text{ pentru orice } x \in G,$$

ceea ce demonstrează că i_a este izomorfism.

1.6.3 Propoziţie. *Dacă* $f \in Hom\,(G,G')$ *atunci* $f(e_G) = e_{G'}$ *şi* $f(x^{-1}) = [f(x)]'$, *simetricul lui* $f(x)$ *în* $(G',*)$.

Deomonstraţie. Din $f(x) = f(x \cdot e_G) = f(x) * f(e_G)$ rezultă $f(e_G) = e_{G'}$, iar $e_{G'} = f(e_G) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1})$ implică $f(x^{-1}) = [f(x)]'$.

1.6.4 Propoziţie. *Compunerea a două omomorfisme de grupuri este de asemenea un omomorfism de grupuri, adică* $f \in Hom\,(G,G')$ *şi* $g \in Hom(G',G'')$ *implică* $g \circ f \in Hom(G,G'')$.

Demonstraţia este imediată.

1.6.5 Corolare. 1^0 *Mulţimea endomorfismelor unui grup înzestrată cu operaţia de compunere formează un monoid, iar cea a automorfismelor acelui grup formează un grup în raport cu compunerea.*

Avem deci $(EndG, \circ) =$ monoid şi $(AutG, \circ) =$ grup.

2^0 *Mulţimea automorfismelor lui* G *formează un subgrup al grupurilor tuturor aplicaţiilor bijective ale lui* G *în el însuşi, adică* $(AutG, \circ) \le (\mathcal{B}_{ij}G, \circ)$.

1.6.6 Aplicaţie. Mulţimea $Int\,G = \{i_a : G \to G\,;\ a \in G\}$ a automorfismelor interioare ale grupului G este un subgrup normal al grupului tuturor automorfismelor lui G, deci $Int\,G \trianglelefteq Aut\,G$.

Demonstraţie. Deoarece $i_a \circ i_b = i_{ba}$ şi $\exists\,(i_a)^{-1} = i_{a^{-1}}$, mulţimea $Int\,G$ este subgrup al lui $Aut\,G$. Într-adevăr

$$\begin{aligned} i_a \circ i_b(x) &= i_a(i_b(x)) = i_a(b^{-1}xb) = a^{-1}(b^{-1}xb)a = \\ &= (a^{-1}b^{-1})x(ba) = (ba)^{-1}x(ba) = i_{ba}(x) \end{aligned}$$

şi $i_{a^{-1}} \circ i_a = i_e = i_a \circ i_{a^{-1}}$, unde $i_e(x) = x$.
Mai mult, pentru orice $f \in Aut\,G$ avem

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ i_a \circ f)(x) &= f^{-1}(i_a(f(x))) = f^{-1}(a^{-1}f(x)a) = \\ &= f^{-1}(a^{-1})f^{-1}(f(x))f^{-1}(a) = [f^{-1}_{(a)}]^{-1}xf^{-1}_{(a)} = i_{f^{-1}_{(a)}}(x), \end{aligned}$$

deci $f^{-1} \circ i_a \circ f = i_{f^{-1}_{(a)}} \in IntG$ ceea ce demonstrează că subgrupul $Int\,G$ este normal.

Următoarea propoziţie dă o altă caracterizare pentru izomorfismele de grupuri, adică o definiţie echivalentă care se aplică practic. Precizăm că în continuare vom nota multiplicativ ambele operaţii de grup.

1.6.7 Propoziţie. *Dacă* $(G,\cdot)$ *şi* $(G',\cdot)$ *sunt grupuri, aplicaţia* $f : G \to G'$ *este izomorfism de grupuri dacă şi numai dacă* f *este un omomorfism bijectiv.*

Demonstraţie. "$\Leftarrow$"Presupunem că omomorfismul f este bijectiv. Rezultă că există inversa $f^{-1} : G' \to G$ astfel încât $f \circ f^{-1} = id_{G'}$ şi $f^{-1} \circ f = id_G$. Să demonstrăm că f^{-1} este omomorfism.

Într-adevăr $\forall\ x', y' \in G'$, cum f este aplicaţia surjectivă, există $x, y \in G$; $f(x) = x'$; $f(y) = y'$ şi

$$\begin{aligned} f^{-1}(x' \cdot y') &= f^{-1}(f(x) \cdot f(y)) \overset{f.\ omom.}{=} f^{-1}(f(xy)) = \\ &= id_G(xy) = x \cdot y = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y'). \end{aligned}$$

Aceasta ne arată că f^{-1} este omomorfism şi deci f este izomorfism.

" $\Rightarrow$ " Dacă $f : G \to G'$ este izomorfism atunci din definiţia 1.6.1.2^0 rezultă că există $g : G' \to G$ care este tocmai inversa lui f şi f fiind inversabilă este bijectivă.

1.6.8 Definiţie. Prin **nucleul unui omomorfism** $\boldsymbol{f \in Hom\ (G,G')}$, notat *Kerf* înţelegem mulţimea elementelor lui G ale căror imagine prin f este elementul neutru din G', deci:

$$Ker\,f = \{x \in G\,;\ f(x) = e_{G'}\}.$$

Evident $Ker\,f \neq \emptyset$ deoarece $e_G \in Ker\,f$.

1.6.9 Propoziţie. *Dacă* $(G,\cdot)$ şi $(G',\cdot)$ *sunt grupuri,* $f \in Hom(G,G')$, *atunci:*

$$a, b \in G\,;\ f(a) = f(b) \Leftrightarrow ab^{-1} \in Ker\,f.$$

Demonstraţie. Dacă $f(a) = f(b)$, atunci înmulţind ambii membri ai egalităţii cu $[f(b)]^{-1}$ şi ţinând seama de Propoziţia 1.6.3 avem $f(a) \cdot [f(b)]^{-1} = e_{G'}$ de unde $f(a) \cdot f(b^{-1}) = e_{G'}$ sau $f(ab^{-1}) = e_{G'}$, adică $ab^{-1} \in Ker f$. Implicaţia în sens invers este imediată.

1.6.10 Definiţie. Prin **imaginea unui grup *G* printr-un omomorfism** $f \in Hom(G, G')$ înţelegem mulţimea:

$$\mathrm{Im} f = f(G) = \{y \in G' \mid \exists\, x \in G\,;\ f(x) = y\}.$$

Dacă $X \subseteq G$ şi $Y \subseteq G'$ atunci $f(X) = \{\ f(x);\ x \in G\ \}$ este imaginea lui X prin f, iar $f^{-1}(Y) = \{x \in G\,;\ f(x) \in Y\}$ notează contra imaginea lui Y prin f.

Relativ la acţiunea omomorfismelor de grupuri asupra subgrupurilor unui grup avem următorul rezultat:

1.6.11 Teorema corespondenţei pentru subgrupuri. *Dacă $f \in Hom(G, G')$ atunci:*

1^0. *$S \leq G \Rightarrow f(S) \leq G'$;*

2^0. *$S' \leq G' \Rightarrow f^{-1}\,(S') \leq G$.*

Demonstraţie. 1^0. Pentru orice $y, y' \in f(S)$ există $x, x' \in S$ astfel încât $f(x) = y$ şi $f(x') = y'$, de unde

$$y \cdot (y')^{-1} = f(x)[f(x')]^{-1} = f(x) \cdot f(x'^{-1}) = f(x \cdot x'^{-1}) \in f(S).$$

Deoarece $x, x' \in S$ şi cum S este subgrup al lui G rezultă că $xx'^{-1} \in S$.

2^0. $\forall\, x, x' \in f^{-1}(S') \Rightarrow f(x), f(x') \in S'$. Întrucât $S' \leq G'$ rezultă $f(x) \cdot [f(x')]^{-1} \in S'$. Dar $f(x) \cdot [f(x')]^{-1} \overset{f \text{ omom.}}{=} f(x) \cdot f(x'^{-1})$, deci $f(x \cdot x'^{-1}) \in S'$ adică $x \cdot x'^{-1} \in f^{-1}(S')$, ceea ce demonstrează că $f^{-1}(S')$ este subgrup al lui G.

1.6.12 Corolare. *Dacă $(G, \cdot)$ şi $(G', \cdot)$ sunt grupuri, $f \in Hom(G, G')$ atunci:*

1^0. $Ker\, f \leq G$;

2^0. $\mathrm{Im} f \leq G'$;

3^0. f *surjectiv* $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = G'$;

4^0. f *injectiv* $\Leftrightarrow Ker\, f = \{e_G\}$;

5^0. f *izomorfism* $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = G'$ şi $Ker f = \{e_G\}$.

Demonstraţie. 1^0 Din definiţia nucleului lui f ca şi contraimaginea subgrupului format numai din elementul neutru din G', $Ker\, f = f^{-1}(\{e_{G'}\})$, cum $\{e_{G'}\} \leq G$, conform teoremei anterioare avem că şi $Ker\, f$ este subgrup al lui G.

4^0 Dacă $Ker\, f = \{e_G\}$ şi $f(a) = f(b)$, atunci conform Propoziţiei 1.6.9 avem $ab^{-1} \in Ker\, f$, deci $ab^{-1} = e_G$, de unde înmulţind egalitatea cu b la dreapta rezultă $a = b$, deci f este injectivă.

Reciproc, dacă f este injectivă şi $x \in Ker\, f$, atunci $f(x) = e_{G'} = f(e_G)$ implică $x = e_G$, deci $Ker f = \{e_G\}$.

Afirmaţiile 2^0 şi 3^0 rezultă din faptul că G este propriul său subgrup, respectiv din definiţia surjectivităţii.

1.6.13 Teorema corespondenţei pentru subgrupurile normale. *Dacă $(G, \cdot)$ şi $(G', \cdot)$ sunt două grupuri şi $f \in Hom(G, G')$, atunci:*

1) $N' \trianglelefteq G' \Rightarrow f^{-1}(N') \trianglelefteq G$ unde $f^{-1}(N') = \{x \in G\,;\ f(x) \in N'\}$

2) ($N \trianglelefteq G$ şi f este surjecţie) $\Rightarrow f(N) \trianglelefteq G'$

Demonstraţie. 1) Conform teoremei 1.6.11 din $N' \leq G'$ rezultă că $f^{-1}(N')$ este subgrup al lui G. Totodată $\forall\, x \in G$ şi $n \in f^{-1}(N')$, deci $f(n) \in N'$ avem $f(x^{-1}nx) = [f(x)]^{-1} \cdot f(n) \cdot f(x) \in N'$, adică $x^{-1}nx \in f^{-1}(N')$. Am demonstrat astfel că $f^{-1}(N') \trianglelefteq G'$.

2) Din proprietatea analoagă pentru subgrupuri, din faptul că $N \leq G$ rezultă $f(N) \leq G'$. Pentru orice $y \in G'$, cum f este surjecţie, rezultă că există $x \in G$ astfel încât $y = f(x)$. Atunci $\forall\, k \in f(N)$ există $n \in N$ astfel încât $k = f(n)$. Prin urmare $y^{-1}ky = [f(x)]^{-1} \cdot f(n) \cdot f(x) = f(x^{-1}nx) \in f(N)$, deoarece $N \trianglelefteq G \Rightarrow x^{-1}nx \in N$. Am demonstrat astfel că $f(N) \trianglelefteq G'$.

1.6.14 Corolare.

1) *Nucleul omomorfismului $f \in Hom(G, G')$, $Ker\, f$ este subgrup normal al lui G.*

Într-adevăr, aplicând teorema precedentă pentru $N' = \{e_{G'}\} \trianglelefteq G$ obţinem $f^{-1}(e_{G'}) = Ker\, f$.

2) *Dacă omomorfismul f este surjectiv, atunci aplicaţia $\varphi : \mathcal{S}_n^*(G) \to \mathcal{S}_n^*(G)$, unde*

$$\mathcal{S}_n^*(G) = \{N; N \trianglelefteq G; Ker\, f \subseteq N\}$$

este bijectivă.

Observăm că dacă f este omomorfism injectiv de grupuri, $f \in Hom(G, G')$, atunci $G \stackrel{\sim}{\to} f(G) \leq G'$.

1.6.15 Definiţie. Spunem că grupul G se **scufundă izomorf** în grupul G' dacă există un omomorfism injectiv de la G la G'.

1.6.16 Exemplu. Grupul aditiv al întregilor, $(\mathbb{Z}, +)$, se scufundă izomorf în grupul aditiv al numerelor raţionale, $(\mathbb{Q}, +)$, deoarece există omomorfismul injectiv $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$; $f(k) = \frac{k}{1}$.

Următoarea teoremă ne arată că studiul grupurilor se reduce la cel al grupurilor de permutări, adică la cel al aplicaţiilor bijective a unei mulţimi în ea însăşi

1.6.17 Teorema lui Cayley. Scufundarea unui grup într-un grup de permutări. *Orice grup se scufundă izomorf într-un grup de permutări (grupul translaţiilor sale stângi).*

Demonstraţie. Fie $(G, \cdot)$ un grup, $a \in G$ un element fixat şi aplicaţia $t_a : G \to G$; $t_a(x) = ax$ numită translaţie la stânga. Să notăm prin $T_G = \{t_a; a \in G\}$ mulţimea tuturor translaţiilor stângi ale grupului G. Se verifică că $(T_G, \circ)$ formează un grup în raport cu compunerea deoarece $\forall a, b \in G$

$$(t_a \circ t_b)(x) = t_a(t_b(x)) = a(bx) = (ab)x = t_{ab}(x) \Rightarrow (t_a \circ t_b) = t_{ab}.$$

Mai mult, pentru orice $t_a \in T_G$, $\exists (t_a)^{-1} = t_{a^{-1}} \in T_G$ şi în T_G există element neutru, aplicaţia identică pe G, care este tocmai t_{e_G}. Deoarece $t_a(x) = t_a(y)$ implică $ax = ay$, de unde înmulţind la stânga cu a^{-1}, rezultă $x = y$, avem că aplicaţia t_a este injectivă. De asemenea $\forall y \in G$, $\exists\, x = a^{-1}y \in G$ astfel încât $t_a(a^{-1}) = y$, deci t_a este surjecţie, şi aplicaţiile t_a sunt bijecţii. Prin urmare, $(T_G, \circ)$ este un subgrup al grupului tuturor aplicaţiilor bijective definite pe G.

Fie acum $f : G \to T_G$; $f(a) = t_a : G \to G$. Aplicaţia f este omomorfism injectiv deoarece:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow t_a = t_b \Rightarrow ax = bx\,;\ \forall\, x \in G \stackrel{x=e}{\Rightarrow} a = b$$

şi

$$f(ab) = t_{ab} = t_a \circ t_b = f(a) \circ f(b).$$

Grupul factor al unui grup în raport cu un subgrup al său. Am văzut în paragraful 1.5 că dacă N este subgrup normal al grupului G, atunci mulţimile factor G/ρ_N şi G/ρ'_N coincid şi le notăm prin G/N. Prin urmare $G/N = \{xN;\ x \in G\}$. Pe această mulţime definim o operaţie binară multiplicativă:

$$(x_1N) \cdot (x_2N) \stackrel{def.}{=} (x_1x_2)N.$$

Observăm că operaţia este bine definită nedepinzând de alegerea reprezentanţilor. Într-adevăr, dacă $x'_1, x'_2 \in G$ şi $x_1N = x'_1N$ iar $x_2N = x'_2N$, adică $x_1^{-1}x'_1 \in N$ şi $x_2^{-1}x'_2 \in N$, atunci

$$\begin{aligned}(x_1x_2)^{-1}(x'_1x'_2) &= (x_2^{-1}x_1^{-1})(x'_1x'_2) = x_2^{-1}(x_1^{-1}x'_1)x'_2 \in x_2^{-1}Nx'_2 = \\ &= x_2^{-1}(Nx'_2) = x_2^{-1}(x'_2N) = (x_2^{-1}x'_2)N \in N.\end{aligned}$$

Se verifică uşor că G/N împreună cu această operaţie este un grup în care elementul neutru este $N = eN$, iar simetricul clasei xN este clasa $x^{-1}N$. Într-adevăr,

$$N \cdot (xN) = (eN)(xN) = (ex)N = xN$$

şi

$$(xN)(x^{-1}N) = (xx^{-1})N = eN = N$$

pentru orice $xN \in G/N$.

1.6.18 Definiţie. Dacă N este un subgrup normal al grupului G, atunci grupul $(G/N, \cdot)$ anterior definit se numeşte **grupul factor al lui G prin N**.

1.6.19 Propoziţie. *Aplicaţia $p : G \to G/N$; $p(x) = xN$ este omomorfism surjectiv de grupuri şi $Ker p = N$.*

1.6.20 Exemple. Pentru orice n natural subgrupul $n\mathbb{Z}$ este normal în $(\mathbb{Z}, +)$, grupul factor $\mathbb{Z}\mid_{n\mathbb{Z}} \stackrel{notat}{=} \mathbb{Z}_n$ se numeşte **grupul claselor de resturi modulo n.** El este ciclic, un generator al său fiind $\widehat{1} = 1 + n\mathbb{Z}$.

Completăm cele spuse în paragraful 1.3 relativ la grupuri ciclice cu următoarele:

1.6.21 Teoremă. 1^0.*Toate grupurile ciclice de acelaşi ordin sunt izomorfe între ele.*

2^0. *Oricare două grupuri ciclice infinite sunt izomorfe.*

Demonstraţie. 1^0. Fie $< a >$ şi $< b >$ două grupuri ciclice de acelaşi ordin n, şi $f :< a >\to< b >$; $f(a^k) = b^k$; $k = 0, 1, \ldots n-1$. Deoarece $\forall\, k, l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ avem $f(a^k \cdot a^l) = f(a^{k+l}) = b^{k+l} = b^k \cdot b^l = f(a^k)f(a^l)$, f este omomorfism.

Aplicaţia $g :< b >\to< a >$; $g(b^k) = a^k$; $k = 0, 1, \ldots n-1$ este de asemenea omomorfism şi mai mult: $(f \circ g)(b^k) = f(g(b^k)) = f(a^k) = b^k$, deci $f \circ g = id_{<b>}$ şi analog $g \circ f = id_{<a>}$. Am demonstrat astfel că f este izomorfism.

2^0. Presupunem că $G =< a >$ şi $G' =< b >$ sunt grupuri ciclice infinite. Aplicaţia $f : G \to G'$; $f(a^k) = (b^k)$ este un izomorfism.

1.6.22 Corolare.

1^0.*Orice grup ciclic infinit este izomorf cu grupul aditiv al numerelor întregi* $(\mathbb{Z}, +)$;

2^0. *Orice grup ciclic de ordin n este izomorf cu grupul aditiv al claselor de resturi* modulo n, $(\mathbb{Z}_n, +)$ (*şi cu grupul unităţilor de ordinul n*, $U_n = \{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, vezi exemplul 1.2.13.$2^0$).

Aplicând teoremele de corespondenţă pentru subgrupuri obţinem

1.6.23 Teorema. *Orice subgrup al unui grup ciclic este ciclic. Imaginea omomorfă a unui grup ciclic este grup ciclic.*

Teoremele de izomorfism au fost date de Emily Noether, teorema fundamentală numită şi prima teoremă de izomorfism stând la baza celorlalte.

1.6.24 Prima teoremă de izomorfism. *Dacă* $f : G \to G'$ *este un omomorfism de grupuri, atunci* $G/Ker\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im} f$.

Demonstraţie. Am văzut, conform corolarului 1.6.14.1) că nucleul $Ker\, f \trianglelefteq G$. Pe grupul factor $G\,|_{Ker\, f}$ definim aplicaţia $\overline{f} : G/Ker\, f \to \mathrm{Im} f$; $\overline{f}\,(xKer\, f) = f(x)$, $\forall x \in G$. Aplicaţia este bine definită nedepinzând de alegerea reprezentanţilor. Într-adevăr, dacă $x_1, x_2 \in G$ astfel încât $x_1 Ker\, f = x_2 Ker\, f$, atunci

$$x_1 \rho_{_{Ker\, f}} x_2 \Leftrightarrow x_1^{-1} x_2 \in Ker\, f \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

conform propoziţiei 1.6.9.

Aplicaţia $\overline{f}$ este un omomorfism de grupuri deoarece $\forall\, x_1, x_2 \in G$ avem:

$$\begin{aligned} \overline{f}\,((x_1 Ker\, f)(x_2 Ker\, f)) &= \overline{f}\,((x_1 x_2) Ker\, f) = f(x_1 x_2) = \\ &= f(x_1) f(x_2) = \overline{f}\,(x_1 Ker\, f) \cdot \overline{f}\,(x_2 Ker\, f). \end{aligned}$$

Mai mult, dacă $x_1, x_2 \in G$ astfel încât $\overline{f}\,(x_1 Ker\, f) = \overline{f}\,(x_2 Ker\, f)$, deci $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $[f(x_1)]^{-1} f(x_2) = e$. De aici avem $f(x_1^{-1} x_2) = e_G$, deci $x_1^{-1} x_2 = Ker\, f$, adică $x_1 Ker\, f = x_2 Ker\, f$. Aplicaţia $\overline{f}$ este evident surjectivă deci $\overline{f}$ este izomorfism.

1.6.25 Aplicaţii. 1) Fie $(\mathbb{R}, +)$ grupul aditiv al numerelor reale, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule şi aplicaţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$; $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$. Deoarece conform regulii de înmulţire a numerelor complexe scrise sub formă trigonometrică avem:

$$\begin{aligned} f(x_1) f(x_2) &= (\cos 2\pi x_1 + i \sin 2\pi x_1)(\cos 2\pi x_2 + i \sin 2\pi x_2) = \\ &= \cos 2\pi(x_1 + x_2) + i \sin 2\pi(x_1 + x_2) = f(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

aplicaţia f este omomorfism de grupuri. Imf este subgrupul lui $\mathbb{C}^*$ format din toate numerele complexe de modul 1 întrucât $|\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x| = 1$ şi oricare ar fi $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|z| = 1$ avem $z = \cos t + i \sin t$, deci există, $x = \dfrac{t}{2\pi}$ astfel învât $f(x) = z$. De asemenea

$$\begin{aligned} Ker\, f &= \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}; \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}; \cos 2\pi x = 1 \text{şi } \sin 2\pi x = 0\} = \{x = k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Aplicând prima teoremă de izomorfism, rezultă că $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul 1.

2) Fie $U = \{x \in \mathbb{C}; \exists\, n \in \mathbb{N}; z^n = 1\}$. Să se arate că:

a) U este subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;

b) Grupul cât $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ este izomorf cu $(U, \cdot)$.

Soluţie. a) Mulţimea U este nevidă pentru că există $1 \in U$. Mai mult, $\forall z_1, z_2 \in U \Rightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{N}^*$; $z_1^m = 1$, $z_2^m = 1 \Rightarrow \exists\, p = [m, n]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor m şi n astfel încât $(z_1 z_2^{-1})^p = 1$, de unde $z_1 z_2^{-1} \in U$.

b) Se aplică prima teoremă de izomorfism omomorfismului $Q/Ker\, f \simeq \mathrm{Im} f$, deci $Q \mid_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} U$.

Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}^*; f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \cos 2\dfrac{k}{n}\pi + i \sin 2\dfrac{k}{n}\pi$. Aplicaţia f este omomorfism al grupurilor $(\mathbb{Q}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, deoarece $\forall\, \dfrac{k}{n}, \dfrac{p}{m} \in \mathbb{Q}$; $k, p \in \mathbb{Z}$; $n, m \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$f\left(\frac{k}{n} + \frac{p}{m}\right) = \cos 2\left(\frac{k}{n} + \frac{p}{m}\right)\pi + i \sin 2\left(\frac{k}{n} + \frac{p}{m}\right) =$$

$$= \left(\cos 2\frac{k}{n}\pi + i \sin 2\frac{k}{m}\pi\right)\left(\cos 2\frac{p}{m}\pi + i \sin 2\frac{p}{m}\pi\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot f\left(\frac{p}{m}\right).$$

Mai mult,

$$Ker\, f = \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{Q};\ f\left(\frac{k}{n}\right) = 1\right\} = \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}; \cos\frac{2k}{n}\pi = 1; \sin\frac{2k}{n}\pi = 0\right\} =$$

$$= \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{Q};\ \frac{2k}{n}\pi = 2k'\pi; k' \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{Q};\ \frac{k}{n} = k' \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{Z}.$$

şi întrucât $\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]^n = 1$ avem $\mathrm{Im} f \subseteq U$. Totodată, oricare ar fi $z \in U$, există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $z^n = 1$, deci este o rădăcină de ordinul n a unităţii. Prin urmare există $k \in \{0, 1, \ldots n-1\}$, astfel că $z = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i \sin\dfrac{2k\pi}{n} = f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, adică $z \in \mathrm{Im} f$, ceea ce demonstrează că $U \subseteq \mathrm{Im} f$, deci $U = \mathrm{Im} f$.

Capitolul 2

Inele

2.1 Inele. Subinele. Definiţii. Exemple.

2.1.1 Definiţii. Fie R o mulţime nevidă înzestrată cu două legi de compoziţie interne, una notată aditiv şi alta multiplicativ $+, \cdot : R^2 \to R$
a) Tripletul $(R, +, \cdot)$ se numeşte **inel** dacă

1^0 $(R, +)$ este un grup abelian, numit grupul subiacent inelului;

2^0 $(R, \cdot)$ este un semigrup;

3^0 operaţia notată multiplicativ este distributivă faţă de cea notată aditiv, adică

$$(\forall) a, b, c \in R; a(b + c) = ab + ac; (a + b)c = ac + bc;$$

b) Dacă într-un inel $(R, +, \cdot)$ există element neutru faţă de operaţia multiplicativă ".", notat prin 1, numit element unitate, adică $(R, \cdot)$ este un monoid, atunci inelul se numeşte **unitar** sau **cu unitate;**
c) Dacă într-un inel $(R, +, \cdot)$ operaţia " $\cdot$ " este comutativă atunci inelul se numeşte **comutativ.**

Menţionăm că, mai general, *inelul se defineşte ca un triplet* $(R, +, \cdot)$ *în care* $(R, +)$ *este grup abelian,* $(R, \cdot)$ *este grupoid şi operaţia* " $\cdot$ " *este distributivă faţă de operaţia* " $+$ ", inelul definit de noi în 2.1.1a.) numindu-se inel asociativ.

În cele ce urmează noi vom trata doar inelele asociative.

Ca şi consecinţe directe ale definiţiei inelului avem următoarea

2.1.2 Propoziţie. Reguli de calcul în inele. *Dacă* $(R, +, \cdot)$ *este un inel,* $0 \in R$ *elementul său neutru faţă de adunare, numit zero, atunci:*

1^o. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$; $\forall a \in R$;

2^o. $\forall a, b \in R$; $a(-b) = (-a)b = -ab$ şi $(-a)(-b) = ab$;

3^o. $\forall a \in R$ şi $n \in \mathbb{N}$ *avem*

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -a^n, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

4^o. $\forall a, b \in R; i = \overline{1, n}; n \in N; a(b_1 + ... + b_n) = ab_1 + ... + ab_n;$

5^o. *Dacă* $a, b \in R$ şi $ab = ba$, *atunci avem*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k;$$

Demonstraţiile sunt simple exerciţii, precizăm că proprietatea 2.1.2.5^o se face prin inducţie după n.

2.1.3 Definiţii. a) Fie $(R,+,\cdot)$ un inel. Un element $a\in R\backslash\{0\}$ se numeşte **divizor al lui zero la stânga (la dreapta)** dacă există $b\in R\backslash\{0\}$, astfel încât $ab=0$ ($\exists c\in R\backslash\{0\};\ ca=0$);

b) Fie $(R,+,\cdot)$ un inel unitar. Elementul $a\in R$ se numeşte **inversabil** dacă există $b\in R$ astfel încât $ab=ba=1$;

c) Numim **domeniu de integritate** un inel comutativ, unitar cu $1\neq 0$ şi fără divizori ai lui zero.

Se demonstrează uşor că au loc următoarele proprietăţi:

2.1.4 Propoziţii. *a) Mulţimea elementelor inversabile ale unui inel unitar $(R,+,\cdot)$, notată $\mathcal{U}(R)$, formează un grup multiplicativ numit **grupul unităţilor** lui R;*

b) Un element inversabil al unui inel nu este divizor al lui zero (nici la stânga, nici la dreapta).

Demonstraţie. a) Fie $\mathcal{U}(R)=\left\{x\in R;\exists x^{-1}\in R; xx^{-1}=x^{-1}x=1\right\}$. Dacă $a,b\in\mathcal{U}(R)$ atunci $ab\in\mathcal{U}(R)$ deoarece există $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ şi dacă $a\in\mathcal{U}(R)$, atunci $(a^{-1})^{-1}=a$, de unde avem că şi $a^{-1}\in\mathcal{U}(R)$. De aici rezultă că $\mathcal{U}(R)$ formează un grup multiplicativ.

b) Fie elementul $a\in\mathcal{U}(R)$ astfel încât a este divizor al lui zero la stânga în R. Deci există $b\in R\backslash\{0\}$ astfel încât $ab=0$. Deoarece există $a^{-1}\in R$ avem $b=(a^{-1}a)b=a^{-1}(ab)=a^{-1}\cdot 0=0$, deci $b=0$, ceea ce este fals.

2.1.5 Exemple. a) $(Z,+,\cdot)$ este domeniul de integritate; $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ este inel comutativ fără unitate;

b) $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_n=\{\widehat{0},\widehat{1},\ldots,\widehat{n-1}\}$ sunt clasele de resturi modulo n este inel unitar. Elementele inversabile ale lui $\mathbb{Z}_n$ sunt clasele de resturi $\widehat{r}$. unde r este prim cu n, deci $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)=\{\widehat{r};(r,n)=1\}$;

c) Fie X o mulţime nevidă şi R un inel. Pe mulţimea R^X a funcţiilor definite pe X cu valori în R definim operaţiile de adunare şi înmulţire astfel

$$f,g:X\to R;(f+g)(x)=f(x)+g(x);(fg)(x)=f(x)\cdot g(x);x\in X.$$

Tripletul $(R^X,+,\cdot)$ este un inel cu elementul zero aplicaţia $\theta:X\to R;\theta(x)=0_R;x\in X$. Dacă R este inel cu unitate atunci R^X este inel unitar având ca unitate aplicaţia $\delta:X\to R;\delta(x)=1_R;x\in R$.

d) Fie R o mulţime şi $m,n\in\mathbb{N}$. Aplicaţia

$$A:\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}\to R$$

se numeşte matrice de tipul (m,n) cu elemente din R.

Notăm $A(i,j)=a_{ij}\in R$. Scriem

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \cdot & \ldots & \cdot\\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

sau pe scurt $(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$. Pentru $m=n$, matricea A se numeşte matrice pătrată.

Vom nota prin $\mathcal{M}_{m,n}(R)$ mulţimea matricelor de tip m,n cu elemente din R. Dacă $(R,+,\cdot)$ este un inel, atunci operaţiile din R induc două operaţii pe mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(R)$ în raport cu care $\mathcal{M}_{m,n}(R)$ este un inel şi anume: dacă $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$; $B=(b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$, atunci

$$A+B=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}\ \text{şi}\ \ A*B=(a_{ij}b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}.$$

Se verifică uşor că $(\mathcal{M}_{m,n}(R),+,*)$ este inel (unitar dacă R este inel unitar, unitatea lui fiind matricea în care toate elementele sunt egale cu unitatea).

După cum se ştie din liceu, acest tip de produs "$*$" nu este utilizat, ci se defineşte înmulţirea unei matrici $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}(R)$ cu matricea $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(R)$ astfel încât $AB=(c_{ij})\in\mathcal{M}_{m,p}(R)$, unde $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ (aşa zisa înmulţire "linii pe coloane").

În mulţimea $\mathcal{M}_n(R)$ a matricilor pătrate de ordinul n cu elemente dintr-un inel R pot fi înmulţite "linii pe coloane" oricare două matrici.

Se verifică uşor că $(\mathcal{M}_n(R), +, *)$ este un inel (necomutativ, chiar dacă R este inel comutativ). Dacă R este inel cu unitate atunci şi $\mathcal{M}_n(R)$ este inelul cu unitatea $I_n = (\delta_{ij})_{ij=\overline{1,n}}$, unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker, adică $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = j \\ 0 & \text{pentru } i \neq j \end{cases}$. Mai mult, inelul $\mathcal{M}_n(R)$ are divizori ai lui zero. Într-adevăr matricele $A = (a_{ij})_{ij=\overline{1,n}}$ cu $a_{11} \neq 0$ şi $a_{ij} = 0$ pentru $(i,j) \neq (1,1)$ şi $B = (b_{ij})_{ij=\overline{1,n}}$ cu $b_{nn} \neq 0$ şi $b_{ij} = 0$ pentru $(i,j) \neq (n,n)$, sunt diferite de matricea nulă, dar produsul lor $AB = O_n$.

e) Fie $(G, +)$ un grup abelian şi $EndG$ mulţimea endomorfismelor grupului. Ea poate fi organizată ca un inel cu unitate în raport cu adunarea şi compunerea endomorfismelor. Astfel, dacă $f, g \in EndG$ atunci definind $f + g : G \to G; (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ şi $f \circ g : G \to G; (f \circ g)(x) = f(g(x))$ se verifică uşor că $f + g$, $f \circ g \in EndG$ şi că $(EndG, +, \circ)$ este un inel cu unitate (endomorfismul identic). Grupul unităţilor (a elementelor inversabile) acestui inel este $AutG$, adică cel al automorfismelor grupului G.

f) Pe o mulţime cu un singur element $A = \{a\}$ există o singură operaţie, pe care considerând-o atât "+" cât şi "$\cdot$" obţinem un inel comutativ cu unitate în care $1 = 0 = a$, numit **inel nul.**

g) Fie $(G, +)$ un grup abelian $G \neq \{0\}$. Definind $\cdot : G^2 \to G;\ x \cdot y = 0_G$, obţinem un inel comutativ fără unitate în care orice element este divizor al lui zero, $(G, +, \cdot)$ numit **inel de pătrat nul,** caracterizat de egalitatea $G^2 = G \cdot G = \{0\}$.

2.1.6 Definiţii. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel şi S o mulţime nevidă a lui R. S se numeşte **subinel** al lui R (notăm $S \leq R$) dacă operaţiile definite pe R induc pe S operaţii algebrice în raport cu care la rândul S este inel.

Dacă R este un inel unitar, S un subinel al lui R şi unitatea inelului aparţine lui S, deci $1 \in S$, atunci spunem că S este un **subinel unitar** al lui R. Practic, în aplicaţii se utilizează următoarea propoziţie

2.1.7 Teorema de caracterizare a subinelelor unui inel. *Dacă* $(R, +, \cdot)$ *este un inel şi* $\emptyset \neq S \subseteq R$, *atunci sunt echivalente afirmaţiile*

1^0 S *este un subinel al lui* R;

2^0 i) $(\forall)\, x, y \in S \Rightarrow x - y \in S \Leftrightarrow (S, +) \leq (R, +)$ şi

ii) $(\forall)\, x, y \in S \Rightarrow xy \in S$.

Demonstraţia este simplu exerciţiu, ea se bazează pe teorema de caracterizare a subgrupurilor unui grup.

2.1.8 Exemple. 1^0. R şi $\{0\}$ sunt subinele ale lui R numite subinele improprii;

2^0. Subinelele lui $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sunt de forma $n\mathbb{Z} = \{nk; k \in \mathbb{Z}\}$ unde $n \in \mathbb{N}$, singurul inel unitar fiind $\mathbb{Z}$. Verificarea este simplu exerciţiu;

3^0. Subinelele lui $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ coincid cu subgrupurile ciclice ale grupului subiacent $(\mathbb{Z}_n, +)$ prin urmare $< \widehat{d} >= \{k\widehat{d}; k \in \mathbb{Z}\}$, unde d divide pe n;

4^0. Dacă R este un inel atunci mulţimea elementelor din inel care comută cu orice element al lui R deci, $Z(R) = \{z \in R; \forall x \in R; zx = xz\}$ este un subinel numit **centrul lui R.**

Într-adevăr, deoarece $0 \in Z(R)$ avem $Z(R) \neq \emptyset$. Dacă $a, b \in Z(R)$, atunci pentru orice $x \in R$ avem $(a+b)x = ax + bx = xa + xb = x(a+b)$, deci $a + b \in \mathbb{Z}(R)$. Totodată

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab),$$

deci $ab \in Z(R)$ şi

$$(-a)x = -(ax) = -(xa) = x(-a),$$

deci $-a \in Z(R)$, ceea ce demonstrează că $Z(R) \leq R$.

Se demonstrează uşor următoarea afirmaţie:

2.1.9 Propoziţie. *Dacă* $(R, +, \cdot)$ *este un inel, atunci oricare ar fi familia de subinele* $(S_i, i \in I)$ *ale inelului, intersecţia lor,* $\bigcap\limits_{i \in I} S_i$, *este de asemenea subinel al lui* R.

2.1.10 Definiţie. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel şi $X \subseteq R$ o submulţime a inelului. Prin subinelul generat de X, notat $< X >$, înţelegem intersecţia tuturor subinelelor lui R care îl conţin pe X, deci

$$< X >= \bigcap (S;\ S \leq R;\ X \subseteq S)\,.$$

Are loc următoarea

2.1.11 Teoremă. *Mulţimea subinelelor unui inel formează o latice completă în raport cu incluziunea.*
Într-adevăr, dată fiind familia de subinele $(S_i)_{i\in I}$ ale inelului R avem

$$\inf(S_i)_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} S_i,$$

iar

$$\sup(S_i)_{i\in I} =< \bigcup_{i\in I} S_i > .$$

2.2 Ideale

2.2.1 Definiţie. Fie $(R,+,\cdot)$ un inel. O submulţime nevidă H a lui R se numeşte **ideal la stânga (la dreapta)** lui R dacă

1^0. $(\forall)\, x,y\in H \Rightarrow x-y\in H$;

2^0. $(\forall) a\in R, \forall x\in H \Rightarrow ax\in H \quad (xa\in H)$.

Notăm $H \trianglelefteq_s R \ (H\trianglelefteq_d R)$.

Un ideal drept care este în acelaşi timp şi un ideal stâng se numeşte **ideal bilateral** sau simplu **ideal** în R; notăm $H \trianglelefteq R$.

2.2.2 Observaţii. a) Din condiţia 1^0 a definiţiei rezultă că $(H,+)$ este un subgrup normal al grupului subiacent inelului, deci $0\in H$şi $(\forall) x\in H\Rightarrow -x\in H$;

b) Orice ideal la stânga (dreapta, bilateral) este subinel al lui R. Reciproca nu este adevărată. Ca un contraexemplu: Inelul numerelor întregi $\mathbb{Z}$, este subinel al inelului numerelor raţionale $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ dar nu este ideal în $\mathbb{Q}$**.**

2.2.3 Exemple. a) R şi $\{0\}$ sunt ideale în R;

b) Idealele lui $\mathbb{Z}$ coincid cu $\{n\mathbb{Z}\}$ deci coincid cu subinelele lui $\mathbb{Z}$;

c) Idealele lui $\mathbb{Z}_n$ coincid cu subinelele lui $\mathbb{Z}_n$;

d) Dacă R este un inel şi $a\in R$ un element fixat în R, atunci mulţimea

$$aR := \{ax \mid x\in R\},$$

respectiv

$$Ra := \{xa \mid x\in R\},$$

respectiv

$$RaR := \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i a y_i \mid x_i, y_i\in R; i=\overline{1,n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

este ideal la dreapta, respectiv la stânga, respectiv ideal bilateral al lui R numite **idealul principal** (la dreapta, respectiv la stânga, respectiv bilateral) **generat de** $a\in R$.

2.2.4 Observaţii. a) În inelul numerelor întregi $\mathbb{Z}$ şi în cel al claselor de resturi modulo n, toate idealele sunt principale.

b) În inelele comutative există un singur concept de ideal.

2.2.5 Propoziţie. *Fie R un inel unitar şi H un ideal al lui R la stânga, la dreapta respectiv bilateral. Avem $H=R$ dacă şi numai dacă H conţine un element inversabil din R. Pe scurt*

$$H\trianglelefteq R;\ \mathcal{U}(R)\cap H\neq\emptyset \Leftrightarrow H=R.$$

Demonstraţie. Fie $H\trianglelefteq R$ şi $H=R$ atunci $1\in H$ şi $1\in\mathcal{U}(R)$.

Reciproc, dacă $H\trianglelefteq R$ şi există $u\in\mathcal{U}(R)\cap H$, atunci există $v\in R$ astfel încât $uv=vu=1$. Oricare ar fi $x\in R$ avem $x=x\cdot 1=x(v\cdot u)=(xv)\cdot u\in H$ deci $R\subseteq H$. Cum $H\subseteq R$, rezultă $R=H$.

2.2.6 Propoziţie. *Dacă R este inel şi $(H_i)_{i\in I}$ o familie de ideale la stânga (dreapta, bilateral) ale lui R, atunci intersecţia $\bigcap_{i\in I} H_i$ este ideal de acelaşi tip al inelului.*

Demonstraţie. Demonstraţia este imediată.

2.2.7 Definiţie. Fie R un ideal şi submulţimea $X \subset R$. Intersecţia tuturor idealelor la stânga ale lui R care-l conţin pe X se numeşte **idealul stâng al lui** R **generat de** X, notat prin $(X\,|$. Deci

$$(X\,| = \cap\{H;\ H \trianglelefteq_s R; X \subseteq H\}.$$

Analog se definesc **idealul drept generat de** X, notat prin $|\,X)$,

$$|\,X) = \cap\{H; H \trianglelefteq_d R; X \subseteq H\}$$

şi **idealul bilateral generat de** X, notat (X)

$$(X) = \cap\{H; H \trianglelefteq R;\ X \subseteq H\}.$$

Mulţimea X se numeşte **mulţime de generatori** ai idealului $(X\,|, |\,X)$ respectiv (X).

Dacă X este o mulţime finită atunci idealele generate de ea se numesc **finit generate**.

2.2.8 Observaţii. 1^0. Dacă $X = \emptyset$ atunci avem $(\emptyset\,| = |\,\emptyset) = (\emptyset) = \{0\}$.

2^0. Idealele $(X\,|, |\,X), (X)$ sunt cele mai mici ideale stângi, drepte, respectiv bilatere care conţin mulţimea X.

2.2.9 Propoziţie. *Fie R un inel unitar şi X o submulţime nevidă a lui R. Atunci avem*

$$(X\,| = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \,\Big|\, n \in \mathbb{N}; a_i \in R; x_i \in X; i = \overline{1,n}\right\}$$
$$|\,X) = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i a_i \,\Big|\, n \in \mathbb{N}; a_i \in R; x_i \in X; i = \overline{1,n}\right\}$$
$$(X) = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i b_i \,\Big|\, n \in \mathbb{N}; a_i, b_i \in R; x_i \in X; i = \overline{1,n}\right\}$$

adică, idealul stâng, drept, respectiv bilater al unui inel unitar R, generat de X sunt formate din mulţimea sumelor finite de elemente din RX, XR, respectiv RXR.

Demonstraţie. Fie $H' = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \,\Big|\, n \in \mathbb{N}; a_i \in R; x_i \in X;\ i = \overline{1,n}\right\}$. Oricare ar fi $u, v \in H$, deci

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i;\ v = \sum_{j=1}^{m} b_j x_j';\ n, m \in \mathbb{N};\ a_i, b_j \in R;\ x_i, x_j' \in X;\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m},$$

diferenţa $u - v = H'$, fiind o sumă de acelaşi tip şi anume $u - v = \sum_{i=1}^{n+m} c_k x_k''$, unde

$$c_k = \begin{cases} a_k & \text{pentru } k = \overline{1,n} \\ -b_{k-n} & \text{pentru } k = \overline{n+1, n+m} \end{cases};$$
$$x_k'' = \begin{cases} x_k & \text{pentru } k = \overline{1,n} \\ x_{k-n}' & \text{pentru } k = \overline{n+1, n+m} \end{cases}.$$

De asemenea, $(\forall)\, a \in R$ şi $(\forall) u \in H'$ avem $au = \sum_{i=1}^{n} (aa_i) x_i \in H'$ deci H' este ideal stâng în R. Cum R este inel unitar pentru orice $x \in R$ avem $x = 1 \cdot x \in H'$ rezultă $X \subset H'$ şi prin urmare

$$(X\,| \subset H. \tag{1}$$

Dacă H este un alt ideal stâng al lui R astfel încât $X \subseteq H$, atunci rezultă că orice sumă de forma $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ din H' aparţine de asemenea şi lui H (deoarece $x_i \in X \subset H$) şi prin urmare $H' \subseteq H$. Întrucât H este oarecare, rezultă că

$$H' \subseteq \cap\{H; H \trianglelefteq_s R; X \subset H\} = (X\,|\,.$$

Din (1) şi (2) rezultă că $H' = (X\,|$.

2.2.10 Observaţie. Idealele stângi, drepte, bilatere generate de un element $a \in R$ al unui inel unitar R, notate prin $(a\,|$, $|\,a)$ respectiv (a) sunt tocmai idealele principale ale lui R şi anume, aR, Ra respectiv RaR definite în exemplul 2.2.3.d). Deci

$$(a\,|= aR;\ |\,a) = Ra\,;\ (a) = RaR.$$

În particular, dacă R este comutativ şi unitar, atunci avem

$$(a) = \{ra + na \mid r \in R; n \in \mathbb{Z}\}.$$

2.2.11 Definiţie. Fie $(H)_{i\in I}$ o familie de ideale ale lui R de acelaşi tip. Idealul generat de reuniunea lor, $\bigcup\limits_{i\in I} H_i$, se numeşte **suma idealelor** şi se notează prin $\sum\limits_{i\in I} H_i$.

Avem
$$\sum_{i\in I} H_i = \{x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}; x_{i_k} \in H_{i_k}; k = \overline{1,n}; i_k \in I\}.$$

Dacă mulţimea de indici I este finită, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ atunci

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \{x_1 + x_2 + \ldots x_n \mid x_i \in H_i; i = \overline{1,n}\}.$$

Să notăm prin $\mathcal{L}_S\ (R)$, $\mathcal{L}_D(R)$ respectiv $\mathcal{L}_B(R)$ mulţimea idealelor stângi, drepte, respectiv bilatere ale lui R. Din cele mai înainte demonstrate rezultă că oricare ar fi o familie $(H_i)_{i\in I}$ de ideale de acelaşi tip ale idealului R, în mulţimea $(\mathcal{L}(R), \subseteq)$ există

$$\inf\,(H_i)_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} H_i$$

şi

$$\inf\,(H_i)_{i\in I} = \left(\bigcup_{i\in I} H_i\right) = \sum_{i\in I} H_i.$$

Avem prin urmare

2.2.12 Teoremă. *Mulţimile idealelor de acelaşi tip ale unui inel R, stângi, drepte, bilatere $(\mathcal{L}_S(R), \subseteq)$; $(\mathcal{L}_D(R), \subseteq)$, respectiv $(\mathcal{L}_B(R), \subseteq)$ sunt latici complete. Laticea idealelor unui inel R este sublatice a laticei subgrupurilor grupului subiacent $(R, +)$.*

Ultima afirmaţie rezultă din faptul că orice ideal a lui R este subgrup normal al grupului $(R, +)$.

2.2.13 Corolar. Dacă H_1, H_2 sunt ideale ale inelului R, atunci

$$H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2; x_1 \in H_1; x_2 \in H_2\}$$

este un ideal al lui R şi

$$\sup\{H_1, H_2\} = H_1 + H_2.$$

2.2.14 Observaţie. Prin calcul direct se verifică că dacă S este subinel al inelului R, iar H ideal al lui R, atunci

$$S + H = \{a + u; a \in S; u \in H\}$$

este subinel al lui R.

2.2.15 Exemple. În inelul $M_2(R)$ al matricilor pătrate de ordinul doi cu elemente dintr-un inel comutativ şi unitar, mulţimile

$$H_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}; a, b \in R\right\};\ H_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}; a, b \in R\right\}$$

sunt ideale la stânga dar nu sunt ideale la dreapta ale lui $M_2(R)$. Suma lor $H_1 + H_2$ este tocmai $M_2(R)$, iar produsele lor sunt $H_1H_2 = H_2$ şi $H_2H_1 = H_1$.

2.3 Omomorfisme de inele

2.3.1 Definiţie. Fie $(R,+,\cdot)$ şi $(R',+,\cdot)$ inele. Aplicaţia $f: R \to R'$ se numeşte **morfism (sau omomorfism) de inele** dacă pentru orice $x, y \in R$ avem

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,;\ f(xy) = f(x)f(y).$$

Dacă R şi R' sunt inele unitare şi în plus avem $f(1_R) = 1_{R'}$ atunci f se numeşte **morfism unital de inele**.

Un morfism al inelului R în el însuşi se numeşte **endomorfism.**

Fie $Hom(R, R')$ mulţimea morfismelor de la inelul R la R'.

2.3.2 Observaţii. 1^0. Există cel puţin un morfism de la R la R' şi anume aplicaţia $\theta : R \to R'$; $\theta(x) = 0_{R'}$ este un morfism de inele numit morfismul nul.

Mai mult, chiar dacă R şi R' sunt inele unitare există morfisme neunitare de la R la R', un astfel de exemplu fiind tocmai cel nul.

Dacă $R \neq \{0\}$ atunci există cel puţin două morfisme de la R la el însuşi şi anume cel nul θ şi cel identic $id_R : R \to R$; $id_R(x) = x$.

2^0. Dacă f este morfism de inele, atunci f este un morfism al structurilor de grup, subiacente inelelor. De aici avem

$$f(0_R) = 0_{R'} \text{şi } \forall x \in R;\ f(-x) = -f(x).$$

3^0. Dacă R şi R' sunt inele unitare şi $f : R \to R'$ este morfism unital de inele, atunci el induce un morfism de la grupul elementelor inversabile din R, $U(R)$ la cel al elementelor inversabile din R', $U(R')$.

Într-adevăr, dacă $a \in U(R)$ atunci există $a' \in R$ astfel încât $a \cdot a' = a' \cdot a = 1_R$, de unde avem $f(a) \cdot f(a') = f(a') \cdot f(a) = 1_{R'}$ şi deci $f(a) \in U(R')$. Mai mult, notând prin a^{-1} respectiv $[f(a)]^{-1}$ simetricele lui a, respectiv $f(a)$ în raport cu operaţia multiplicativă definită în cele două inele avem

$$f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}\,,\ \forall\, a \in U(R).$$

Se verifică imediat următoarea afirmaţie

2.3.3 Propoziţie. *Compunerea a două morfisme de inele este tot un morfism de inele,adică dacă $f \in Hom(R, R')$ şi $g \in Hom(R', R'')$ atunci $g \circ f \in Hom(R, R'')$.*

2.3.4 Definiţii. Un morfism de inele $f : R \to R'$ se numeşte morfism injectiv sau **monomorfism** dacă aplicaţia f este injectivă. El se numeşte **omomorfism surjectiv** dacă f este surjectivă. Un morfism de inele $f : R \to R'$ se numeşte **izomorfism** al inelelor R şi R' (notăm $R \simeq R'$) dacă există morfismul $g : R' \to R$ astfel încât $g \circ f = id_R$ şi $f \circ g = id_{R'}$. Un izomorfism $f : R \to R$ se numeşte **automorfism** al inelului R.

Prin nucleul unui morfism de inele $f : R \to R'$ înţelegem mulţimea

$$Kerf = x \in R;\ f(x) = 0_{R'}.$$

Următoarea teoremă dă o altă caracterizare a izomorfismelor de inele, mai uşor de aplicat.

2.3.5 Propoziţie. *Un morfism $f : R \to R'$ de inele, este izomorfism dacă şi numai dacă este un morfism bijectiv, deci aplicaţia f este bijectivă.*

Demonstraţie. Dacă f este un izomorfism atunci conform definiţiei 2.3.4, f este inversabil ceea ce implică că f este bijectiv.

Reciproc, dacă $f : R \to R'$ este o bijecţie atunci aplicaţia f este inversabilă, deci există $f^{-1} : R' \to R$ astfel încât $f^{-1} \circ f = 1_R$ şi $f \circ f^{-1} = 1_{R'}$.

Să demonstrăm că f^{-1} este un morfism de inel. Într-adevăr, f fiind surjecţie, oricare ar fi $x', y' \in R'$ există $x, y \in R$ astfel încât $f(x) = x'$ şi $f(y) = y'$ şi deci $x = f^{-1}(x')$ şi $y = f^{-1}(y')$. Avem atunci

$$\begin{aligned} f^{-1}(x' \cdot y') &= f^{-1}(f(x) \cdot f(y)) = f^{-1}(f(xy)) = \\ &= (f^{-1} \circ f)(xy) = xy = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y'), \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează că f^{-1} este morfism de inele.

Deoarece f este un izomorfism al grupurilor subiacente $(R, +)$ şi $(R', +)$, atunci f^{-1} este izomorfism al acestor grupuri şi deci $f^{-1}(x' + y') = f^{-1}(x') + f^{-1}(y')$.

2.3.6 Teorema de corespondenţă pentru subinele şi ideale. *Dacă R şi R' sunt inele şi $f \in Hom(R, R')$ atunci*

1^0. *Dacă S este un subinel al lui R, atunci $f(S)$ este subinel al lui R';*

2^0. *Dacă S' este subinel al lui R' atunci contraimaginea lui S', $f^{-1}(S') = \{x \in R \mid f(x) \in S'\}$ este deasemenea subinel al lui R;*

3^0. *Dacă H este un ideal stâng, (drept respectiv bilateral) al lui R şi f este un morfism surjectiv de inele atunci $f(H)$ este un ideal de acelaşi tip al lui R';*

4^o. *Dacă H' este un ideal stâng, drept respectiv bilater al lui R' atunci contraimaginea lui H' prin f, $f^{-1}(H')$, este un ideal de acelaşi tip al lui R.*

Demonstraţie. Vom demonstra afirmaţia 3^0 spre exemplu. Deoarece $(R, +)$ este un grup abelian şi $(H, +)$ este un subgrup normal al lui $(R, +)$, iar $f : (R, +) \to (R', +)$ este un omomorfism de grupuri, rezultă că $(f(H), +)$ este subgrup normal al lui $(R', +)$.

Fie H un ideal stâng în R. Oricare ar fi $b \in R'$, întrucât f este surjecţie, există $x \in H$ astfel încât $b = f(a)$. Prin urmare, pentru orice $y \in f(H)$ există $x \in H$ astfel încât $y = f(x)$, deci $by = f(a) \cdot f(x) = f(ax) \in f(H)$ deoarece $ax \in H$.

În cazurile particulare $S = R$, respectiv $H' = \{0_{R'}\}$ notând prin $\mathrm{Im} f = f(R)$, respectiv $Ker\, f = f^{-1}(0_{R'})$ teorema 2.3.6 aliniatele 1^0 şi 4^0 ne conduc la următorul

2.3.7 Corolar. *Dacă R şi R' sunt inele şi $f \in Hom(R, R')$ atunci $f(R)$ este subinel al lui R', iar nucleul lui f, $Kerf$, este deasemenea ideal al lui R.*

Fie R un inel, H un ideal al său şi ρ o relaţie definită pe elementele lui R astfel $x\rho y \Leftrightarrow x - y \in H$. Întrucât H este subgrup normal al grupului $(R, +), \rho$ este relaţie de echivalenţă şi mulţimea factor $R/_\rho$ în raport cu ρ notată prin R/H este $R/H = \{\widehat{x} = x + H; x \in R\}$.

Aplicând teoremele corespunzătoare de la grupuri, pe mulţimea R/H se defineşte adunarea astfel încât $(R/H, +)$ este grup abelian şi anume: dacă $x+H$, $y+H \in R/H$ atunci $(x+H)+(y+H) = (x+y)+H$. Definind şi o operaţie multiplicativă $(x + H)(y + H) = xy + H$ (operaţia este bine definită, nedepinzând de alegerea reprezentanţilor ceea ce rezultă prin simplă verificare), se arată că $(R/H, +, \cdot)$ este un inel cu elementul nul H.

Notând simplificat clasa de echivalenţă $x + H$ prin $\widehat{x}$ şi $y + H$ prin $\widehat{y}$, operaţiile din inelul factor sunt $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ şi $\widehat{x}\widehat{y} = \widehat{xy}$.

2.3.8 Definiţie. Dacă R este un inel, H un ideal al său, atunci inelul $(R/H, +, \cdot)$ se numeşte **inelul factor** al lui R în raport cu idealul H.

Aplicaţia canonică $\rho_H : R \to R/H$; $\rho_H(x) = x+H$ este un morfism surjectiv de inele şi $Ker\, \rho_H = H$. Cum nucleul $Ker\, f$ al unui omomorfism de inele $f \in Hom(R, R')$ este ideal în R, putem vorbi de inelul factor $R/_{Ker\, f}$, iar aplicaţia canonică $\rho_{Ker\, f}$ are nucleul tocmai $Ker\, f$.

2.3.9 Observaţii. 1^0 Dacă R este un inel comutativ atunci inelul factor în raport cu orice ideal al său este de asemenea comutativ.

2^0 Dacă R este inel unitar atunci orice inel factor al său este cu unitate.

2.3.10 Exemplu. Inelul claselor de resturi modulo n. Fie $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ inelul numerelor întregi. Se ştie că $(\mathbb{Z}, +)$ este grup ciclic generat de 1 şi dacă H este un subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$ atunci el este de asemenea ciclic şi anume dacă n este cel mai mic număr natural aparţinând lui H, atunci $H = n\mathbb{Z}$. De aici rezultă că H este ideal al lui $\mathbb{Z}$, tocmai idealul principal generat de n. Orice ideal al lui $\mathbb{Z}$ este de forma $n\mathbb{Z}$. Inelul factor al lui $\mathbb{Z}$ în raport cu idealul $n\mathbb{Z}$, deci $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ se notează prin $\mathbb{Z}_n$ şi elementele lui sunt clasele de echivalenţă modulo n:

$$\mathbb{Z}_n = \{n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, 2 + n\mathbb{Z}, \dots, (n - 1) + n\mathbb{Z}\}.$$

Notând clasa $k + n\mathbb{Z}$ prin $\widehat{k}$ scriem $\mathbb{Z}_n = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \dots, \widehat{n-1}\}$. Se verifică uşor că dacă n este număr compus, deci $n = p \cdot q$ cu $1 < q$, $p < n$, atunci $\widehat{p} \cdot \widehat{q} = \widehat{0}$, deci inelul factor $\mathbb{Z}_n$ are divizori ai lui zero. Clasa $\widehat{k}$ este element inversabil în $\mathbb{Z}_n$ dacă şi numai dacă k şi n sunt prime între ele. Într-adevăr, dacă $(k, n) = 1$, atunci există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $uk + vn = 1$, de unde rezultă că $\widehat{u} \cdot \widehat{k} + \widehat{v} \cdot \widehat{n} = \widehat{1}$ deci $\widehat{u} \cdot \widehat{k} = \widehat{1}$ (cum $\widehat{n} = 0$). Prin urmare există $(\widehat{k})^{-1} = \widehat{u}$. Invers, dacă $\widehat{k}$ este element inversabil în $\mathbb{Z}_n$ atunci $\exists\ \widehat{u}$ astfel încât

$\widehat{k} \cdot \widehat{u} = \widehat{1}$ şi $\widehat{k \cdot u - 1} = \widehat{0}$ şi deci n divide pe $(ku - 1)$. Prin urmare $\exists\ v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ku - 1 = vn$, de unde $ku + (-v)n = 1$. Aceasta demonstrează că $(n, k) = 1$.

Ca o consecinţă a celor demonstrate mai sus relativ la elementele inversabile din $\mathbb{Z}_n$ deducem că ordinul grupului $U(\mathbb{Z}_n)$ este egal cu $\varphi(n)$, indicatorul lui Euler, adică cardinalul mulţimii numerelor naturale mai mici ca n, prime cu n. În particular, dacă n este număr prim, atunci toate elementele nenule ale lui $\mathbb{Z}_n$ sunt inversabile, deci $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este corp.

2.3.11 Teorema fundamentală de izomorfism pentru inele. *Dacă R şi R' sunt inele şi $f \in Hom(R, R')$ atunci inelul factor al lui R în raport cu nucleul lui f, $Ker\, f$ şi $f(R)$ sunt izomorfe:*

$$R/_{Ker\, f} \simeq \mathrm{Im} f.$$

Demonstraţie. Din prima teoremă de izomorfism pentru grupuri rezultă că există şi este bine definit omomorfismul bijectiv al grupurilor $\overline{f} : (R/_{Ker\, f}, +) \to (\mathrm{Im} f, +)$; $\overline{f}\,(\widehat{x}) = \overline{f}\,(\overline{x + Ker\, f}) = f(x)$.

Deoarece pentru orice $\widehat{x}, \widehat{y} \in R/_{Ker\, f}$ avem $\overline{f}\,(\widehat{x} \cdot \widehat{y}) = \overline{f}\,(\widehat{xy}) = f(xy) = f(x) \cdot f(y) = \overline{f}\,(\widehat{x}) \cdot \overline{f}\,(\widehat{y})$ rezultă că $\overline{f}$ este un omomorfism bijectiv de inele şi putem scrie

$$R/_{Ker\, f} \simeq \mathrm{Im} f.$$

2.4 Corpuri. Subcorpuri. Morfisme de corpuri.

2.4.1 Definiţie. Un inel unitar $(K, +, \cdot)$ cu $1 \neq 0$ se numeşte numeşte **corp** dacă $\forall x \in K \backslash \{0\} \overset{notat}{=\!=} K^*$, x este inversabil. Un corp $(K, +, \cdot)$ în care operaţia multiplicativă este comutativă se numeşte corp comutativ sau **câmp**.

2.4.2 Observaţii a) Într-un corp există două grupuri $(K, +)$ şi $(K^*, \cdot)$;

b) Un corp are cel puţin două elemente;

c) Un corp nu are divizori ai lui zero. Într-adevăr, dacă $ab = 0$ şi $a \neq 0$ atunci întrucât există $a^{-1} \in \mathbb{R}$ avem

$$b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Reciproca acestei afirmaţii nu este adevărată. Spre exemplu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este un inel integru dar nu e corp. În caz finit după cum se va demonstra în continuare, orice domeniu de integritate este corp.

2.4.3 Exemple 1^0. Mulţimile numerelor raţionale, reale respectiv complexe înzestrate cu adunarea şi înmulţirea obişnuite sunt corpuri comutative.

2^0.Dacă $d \in \mathbb{N}$ astfel încât ori care ar fi p număr prim, $p^2 \neq d$, atunci d se numeşte liber de pătrate. Mulţimea $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ înzestrată cu adunarea şi înmulţirea din $\mathbb{R}$, deci $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), +, \cdot)$ este un corp comutativ.

3^0. Inelul claselor de resturi modulo n, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este un corp finit comutativ dacă şi numai dacă n este număr prim.

2.4.4 Propoziţie. *Orice domeniu de integritate finit este corp.*

Demonstraţie. Fie $(R, +, \cdot)$ un domeniu de integritate finit şi $a \in R$. Aplicaţia $t_a : R \to R$, $t_a(x) = ax$ (translaţia la stânga) este injectivă deoarece $t_a(x_1) = t_a(x_2)$ implică $a(x_1 - x_2) = 0$ şi cum $a \neq 0$ şi în R nu există divizori ai lui zero, rezultă $x_1 - x_2 = 0$, deci $x_1 = x_2$.

Întrucât R este inel finit şi aplicaţia t_a este injectivă, rezultă că ea este şi surjectivă, deci există $b \in R$ astfel încât $t_a(b) = 1$, adică $ab = 1$.

Analog, translaţia la dreapta $t'_a : R \to R$, $t'_a(x) = xa$ este injectivă, deci surjectivă, deci există $c \in R$ astfel încât $t'_a(c) = 1$, adică $ca = 1$.

Dar $c = c \cdot 1 = c \cdot (ab) = (ca) \cdot b = 1 \cdot b = b$, ceea ce ne arată că în R există inversul oricărui element nenul $(a^{-1} = b = c)$ şi $(R, +, \cdot)$ este corp.

2.4.5 Definiţie. Dacă K este un corp şi F o submulţime nevidă a sa, F se numeşte subcorp al lui K dacă aplicaţiile definite pe K induc pe F operaţii algebrice în raport cu care F este corp. Notăm $F \leq K$.

O caracterizare a subcorpurilor este dată de propoziţia de mai jos, a cărei demonstraţie este un simplu exerciţiu.

2.4.6 Propoziţie. *Dacă K este un corp , $F \subseteq K$, $F \neq \emptyset, F$ este subcorp al lui K dacă şi numai dacă*

1^0. $\forall x, y \in F \Rightarrow x - y \in F$;

2^0 $\forall x, y \in F;\ y \neq 0;\ xy^{-1} \in F$.

2.4.7 Exemple. 1^0.Corpul numerelor raţionale este subcorp al corpului numerelor reale care la rândul său este subcorp al corpului numerelor complexe $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$;

2^0. Dacă d este liber de pătrate atunci avem $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \leq \mathbb{R}$.

2.4.8 Propoziţie. *Singurele subcorpuri ale corpului numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ şi ale lui $\mathbb{Z}_p$, unde p este număr prim, sunt ele însele.*

Demonstraţie. 1^0. Dacă F este un subcorp al lui $\mathbb{Q}$ atunci $0, 1 \in F$, deci avem şi $-1 \in F$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se demonstrează prin inducţie că avem $n = n \cdot 1 \in F$, deci şi $-n \in F$. Prin urmare avem $\mathbb{Z} \subseteq F$. Fie acum $x \in \mathbb{Q}$, deci $x = \dfrac{m}{n}$, unde $n \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Deoarece $\mathbb{Z} \subset F$ conform Propoziţiei 2.4.6 avem $x = m \cdot n^{-1} \in F$, deci $\mathbb{Q} \subseteq F$ şi deoarece $F \subseteq \mathbb{Q}$, avem $F = \mathbb{Q}$.

2^0. Dacă p este număr prim şi F este un subcorp al lui $\mathbb{Z}_p$ atunci întrucât $(F, +)$ este un subgrup al grupului subiacent $(\mathbb{Z}_p, +)$, conform teoremei lui Lagrange, rezultă că ordinul lui F divide ordinul lui $\mathbb{Z}_p$, deci divide pe p. Cum p este număr prim şi orice corp are cel puţin două elemente, rezultă că $\mid F \mid = p$ de unde $F = \mathbb{Z}_p$.

Precizăm că un corp pentru care singurul subcorp este el însuşi se numeşte corp **prim**.

Utilizând Propoziţia 2.4.6. se demonstrează imediat următoarea afirmaţie:

2.4.9 Propoziţie. *Intersecţia subcorpurilor oricărei familii de subcorpuri ale unui corp este un subcorp al acelui corp.*

Noţiunea de ideal poate fi definită şi într-un corp, privit ca şi inel cu unitate, dar conform propoziţiei 2.2.5 într-un corp singurele ideale ale sale sunt cele improprii, adică $\{0\}$ şi el însuşi.

2.4.10 Definiţie. Dacă $(K, +, \cdot)$ şi $(K', +, \cdot)$ sunt corpuri, aplicaţia $f : K \to K'$ se numeşte **omomorfism de corpuri** dacă pentru orice $x, y \in K$ avem $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ şi $f(1_K) = 1_{K'}$.

2.4.11 Observaţie. Un omomorfism de corpuri $f : K \to K'$ este omomorfism al grupurilor $(K, +)$ în $(K', +)$, respectiv $(K^*, \cdot)$ în $(K'^*, \cdot)$ de unde avem:

$$f(0_K) = 0_{K'}; f(-x) = -f(x), \forall x \in K; f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}, \forall x \in K^*.$$

2.4.12 Propoziţie. *Orice omomorfism de corpuri este injectiv.*

Demonstraţie. Fie $f : K \to K'$ un morfism de corpuri. Pentru orice $x, y \in K, x \neq y$ avem $x - y \neq 0$, deci există $(x - y)^{-1} = z \neq 0$ şi $(x - y)z = 1$. De aici avem $f(x - y)f(z) = 1_K$ şi cum $f(z) \neq 0$ rezultă $f(x - y) \neq 0$, deci $f(x) \neq f(y)$, ceea ce demonsrează că f este injectiv.

2.4.13 Observaţie. Imaginea $\mathrm{Im} f$ a unui omomorfism de corpuri $f : K \to K'$ este un subcorp a lui K'.

2.4.14 Exemple. 1^0.**Corpul numerelor complexe**. Mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C} = \{a + bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ este un corp comutativ în raport cu adunarea şi înmulţirea:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

Aplicaţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi(a) = a + 0i$ fiind un omomorfism de corpuri ne indică că $\mathbb{R}$, corpul numerelor reale se scufundă izomorf în $\mathbb{C}$.

Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ o submulţime a inelului a matricilor pătrate definite pe $\mathbb{R}$. Se verifică uşor că în raport cu adunarea şi înmulţirea matricilor $(M, +, \cdot)$ este un corp. Mai mult, el este izomorf cu corpul numerelor complexe, deoarece aplicaţia $f : \mathbb{C} \to M;\ f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ este un omomorfism surjectiv de corpuri.

Vom generaliza acest rezultat obţinând:

2^0. **Corpul cuaternionilor.** Fie $K = \{a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k\,;\ a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$, unde

$$ij = -ji = k;\ ki = -ik = j;\ jk = -kj = i,$$

relaţii care se reţin din următoarea “tablă a înmulţirii”

$\cdot$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Dacă pe mulţimea K definim adunarea “pe componente” şi înmulţirea ca şi cea a polinoamelor utilizând tabla de înmulţire de mai sus, adică

$$(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) + (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i + (a_3 + b_3)j + (a_4 + b_4)k$$

$$(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)(b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) = (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4)+$$
$$+i(a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_4 + a_4 b_3) + j(a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_2 b_4 + a_4 b_2) + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2),$$

se verifică că $(K, +, \cdot)$ este un corp numit **corpul cuaternionilor** în care corpul numerelor complexe se scufundă izomorf.

Această construcţie nu este artificială, întrucât se demonstrează că următoarea submulţime a inelului matricilor pătratice de ordinul doi cu elemente din $\mathbb{C}$,

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix};\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

este un corp în raport cu adunarea şi înmulţirea obişnuită a matricilor. Într-adevăr H este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea, opusa oricărei matrici din H este element al lui H, şi pentru orice matrice nenulă $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in H$ avem determinantul ei $\Delta = \mid \alpha \mid^2 + \mid \beta \mid^2 \neq 0$ ceea ce arată că există inversa ei,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{\alpha}}{\Delta} & -\dfrac{\beta}{\Delta} \\ \dfrac{\overline{\beta}}{\Delta} & \dfrac{\alpha}{\Delta} \end{pmatrix} \in H.$$

Dacă $\alpha = a + bi$ şi $\beta = a' + b'i$ putem scrie

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + a' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ceea ce ne arată că aplicaţia $f : K \to H$;

$$f(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 i & a_3 + a_4 i \\ -(a_3 - a_4 i) & a_1 - a_2 i \end{pmatrix}$$

este un omomorfism de corpuri, rezultat care-l generalizează pe cel de la numere complexe.

Un rezultat fundamental relativ la corpuri pe care-l prezentăm fără demonstraţie este

2.4.15 Teorema lui Wedderburn. *Orice corp finit este comutativ.*

Încheiem acest capitol cu câteva consideraţiuni privind noţiunile de caracteristică a unui inel, respectiv corp.

2.4.16 Definiţie. Fie $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ un inel cu unitate. Ordinul elementului unitate 1_R în grupul subiacent inelului $(\mathbb{R}, +)$ se numeşte **caracteristica** inelului R.

Notăm prin char$R$ caracteristica inelului R.

2.4.17 Observaţie. Din definiţia de mai sus rezultă că dacă char$R = n$ atunci n este cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că $n \cdot 1_R = 0_R$, deci $1_R + 1_R + \ldots + 1_R = 0_R$, însumarea făcându-se de n ori. Dacă ord $1_R = \infty$ atunci spunem că R este inel de caracteristică infinită sau după alţi autori, de caracteriastică zero.

2.4.18 Exemple. 1) Inelul $\mathbb{Z}$ şi corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ au caracteristica ∞;

2) Inelele $\mathbb{Z}_n$ şi $\mathbb{Z}_n[X]$, cel al polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_n$, au caracteristica n $(n \geq 2)$.

2.4.19 Propoziţie. *Într-un inel cu unitate fără divizori ai lui zero, caracteristica inelului este ∞ sau un număr prim.*

Demonstraţie. Presupunem că avem $charR = n$, număr compus, deci $n = m{\cdot}k$ unde $1 < m,\ k < n$. Din ord$1_R = n$ rezultă că $0_R = n{\cdot}1_R = (m{\cdot}k)1_R = (m1_R){\cdot}(k1_R)$ şi întrucât $m, k < n$ rezultă că $m1_R = 0_R$ sau $k1_R = 0_R$, contradicţie, deoarece inelul n-are divizori ai lui zero.

2.4.20 Corolar. *Caracteristica unui domeniu de integritate sau corp este un număr prim sau infinit.*

Se verifică uşor următoarele afirmaţii

2.4.21 Teoremă. *Dacă R este un inel comutativ cu unitate având caracteristica un număr prim p, atunci*

$$(a + b)^p = a^p + b^p \text{ pentru orice } a, b \in R.$$

2.4.22 Teoremă. *Pentru orice inel cu unitate R există un singur omomorfism de inele $f : \mathbb{Z} \to R$, $f(m) = m1_R$. Dacă $charR = \infty$ atunci f este injectiv, iar dacă $charR = n; n \in \mathbb{N}^*$, atunci $Kerf = n\mathbb{Z}$.*

Demonstraţie. Demonstrăm mai întâi unitatea lui f. Într-adevăr dacă $f : \mathbb{Z} \to R$ este omomorfism unital de inele, atunci $\forall k \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$f\,(k) = f\,(1 + ... + 1) = f\,(1) + ... + f\,(1) = 1_R + ... + 1_R = k1_R.$$

Deci f este definit de relaţia din enunţul Teoremei 2.4.22. Se verifică uşor că f este un omomorfism unital de inele.

Dacă caracteristica inelului este ∞, atunci $Kerf = \{0_\mathbb{Z}\}$ deci f este injectiv. Atunci $\mathbb{Z}$ se scufundă izomorf în inelul R de caracteristică infinit.

Dacă caracteristica inelului este n atunci

$$Kerf = \{m \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z};\ m = kn\} = n\mathbb{Z}.$$

Conform primei teoreme de izomorfism pentru inele avem

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{Im}f \leq R.$$

Prin urmare inelul R are un subinel izomorf cu $\mathbb{Z}_n$.

Am demonstrat astfel următoarele

2.4.23 Corolare. 1) Inelul întregilor este cel mai mic inel cu unitate de caracteristică ∞;

2) $\mathbb{Z}_n$ este cel mai mic inel cu unitate de caracteristică n.

Capitolul 3

Probleme de algebră

3.1 Enunţuri

Grupuri

3.1.1 a) Să se arate că $(G,*)$, unde $G=(-1,1)$ şi operaţia "$*$" se defineşte $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$ este un grup abelian.

b) Arătaţi că funcţia $f:(0,\infty)\to(-1,1)\,,\ f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}\,,\ (\forall)\,x\in(0,\infty)$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ la grupul $(G,*)$.

3.1.2 Pentru $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}$ definim funcţia $f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ , f_{a,b}=ax+b$. Notăm $A=\{f_{a,b}|a\in\mathbb{R}^*;b\in\mathbb{R}\}$; $T=\{f_{1,b}|b\in\mathbb{R}\}$ şi $S=\{f_{a,0}|a\in\mathbb{R}^*\}$. Demonstraţi că:

a) $(A,\circ)$ este grup "$\circ$" fiind operaţia de compunere a funcţiilor. Este $(A,\circ)$ subgrup normal în grupul $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}},\circ)$ al permutărilor lui $\mathbb{R}$?

b) $(T,\circ)$ este un subgrup abelian al lui A, izomorf cu $(\mathbb{R},+)$.

c) $(S,\circ)$ este un subgrup abelian al lui A, izomorf cu $(\mathbb{R}^*,\cdot)$. Este S subgrup normal în A?

d) T este un subgrup normal în A şi $A/_T$ este izomorf cu $(\mathbb{R}^*,\cdot)$. Este T subgrup normal şi în $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}},\circ)$?

3.1.3 Să se arate că $Z(S_3)=\{e\}$ unde e este permutarea identică din grupul permutărilor de ordinul trei, $(S_3,\circ)$, iar $Z(S_3)$ este centrul grupului. Generalizare pentru $S_n\,,\ n\in\mathbb{N}\,,\ n\geq 3$.

3.1.4 Arătaţi că orice subgrup al unui grup ciclic este ciclic.

3.1.5 Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $x,y\in G$ astfel ca $xy=yx, \operatorname{ord} x=m$ şi $\operatorname{ord}\, y=n$. Să se arate că:

a) $\operatorname{ord}(xy)$ este finit şi $\operatorname{ord}(xy)\,|\,[m,n]$;

b) dacă $<x>\cap<y>=\{e\}$ atunci $\operatorname{ord}(xy)=[m,n]$;

c) dacă $(m,n)=1$ atunci $\operatorname{ord}(xy)=m\cdot n$ şi $<x,y>=<x\cdot y>$.

3.1.6 Fie G un grup şi H,K subgrupuri ale lui G. Să se arate că $H\cup K$ este subgrup al lui G dacă şi numai dacă $H\subseteq K$ sau $K\subseteq H$.

3.1.7 a) Dacă G este un grup, să se arate că G nu se poate scrie ca reuniune a două subgrupuri proprii ale sale.

b) Să se arate că există grupuri care se pot scrie ca reuniune a trei subgrupuri proprii.

3.1.8 Să se precizeze ordinul fiecărui element din grupul rădăcinilor de ordinul 6 ale unităţii, $(U_6,\cdot)$, şi să se construiască diagrama laticii subgrupurilor sale. Care dintre subgrupuri sunt subgrupuri normale?

3.1.9 a) Fie $f \in End(\mathbb{Z},+)$. Să se arate că $f(n) = f(1) \cdot n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$.
b) Fie $f \in End(\mathbb{Q},+)$. Să se arate că $f(r) = f(1) \cdot r$, $(\forall)\, r \in \mathbb{Q}$.

3.1.10 Să se determine endomorfismele şi automorfismele grupului $(\mathbb{Z},+)$ şi $(\mathbb{Q},+)$.

3.1.11 Să se determine grupurile cât ale lui $(\mathbb{Z},+)$ şi să se arate că acestea sunt ciclice.

3.1.12 Să se determine subgrupurile grupului aditiv $\mathbb{Z}_n$.

3.1.13 Să se determine subgrupurile şi grupurile cât ale următoarelor grupuri:

$$(\mathbb{Z}_4,+); (\mathbb{Z}_6,+); (\mathbb{Z}_{12},+);\ (\mathbb{Z}_{15},+); (\mathbb{Z}_{24,+)}.$$

3.1.14 Fie $H = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\,z\,| = 1\}$. Să se arate că:
a) H este un subgrup al lui $(\mathbb{C}^*,\cdot)$;
b) Grupul cât al lui $(\mathbb{R},+)$ în raport cu $\mathbb{Z}$ este izomorf cu $(H,\cdot)$.
c) Grupul cât $\mathbb{C}^*/_H$ este izomorf cu $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ şi cu $(\mathbb{R},+)$.
d) Grupul cât $\mathbb{C}^*/_{\mathbf{R}_+^*}$ este izomorf cu $(H,\cdot)$.

3.1.15 Să se arate că următoarele grupuri nu sunt izomorfe:
a) $(\mathbb{Q},+)$ şi $(\mathbb{R},+)$;
b) $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ şi $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

3.1.16 Fie p un număr prim. Să se arate că orice grup de ordinul p este ciclic şi este generat de orice element al său diferit de elementul neutru.

3.1.17 Să se determine toate grupurile neizomorfe de ordinele 1, 2, 3, 4 şi 5.

3.1.18 Fie $H = \{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}$ cu operaţia dată în tabla următoare:

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

a) Să se arate că $(H,\cdot)$ este un grup necomutativ numit **grupul cuaternionilor**;
b) Să se precizeze ordinul fiecărui element din grupul $(H,\cdot)$;
c) Să se determine subgrupurile lui $(H,\cdot)$ şi să se figureze subgrupul laticii subgrupurile lui $(H,\cdot)$;
d) Care dintre subgrupurile lui $(H,\cdot)$ sunt subgrupuri normale?

3.1.19 Fie $H = \{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}$ grupul cuaternionilor. Să se descrie clasele la stânga ale lui H în raport cu echivalenţa definită de
a) subgrupul generat de i;
b) subgrupul generat de j;
c) subgrupul generat de k;
d) subgrupul generat de 1;
e) subgrupul generat de (-1);
f) subgrupul generat de $\{i,j\}$.

3.1.20 Să se construiască grupul cât al grupului $\{2^x \cdot 3^y \cdot 5^z | x,y,z \in \mathbb{Z}\}$ prin grupul $\{2^z | z \in \mathbb{Z}\}$.

3.1.21 Fie $(G,\cdot)$ un grup, H şi N subgrupuri ale lui G astfel încât N să fie subgrup normal. Arătaţi că:
a) $NH = HN$ şi, mai mult, această mulţime este un subgrup al lui G.
b) $N \cap H$ este subgrup normal al lui H.

c) există un izomorfism de grupuri: $H/_{N\,\cap H} \simeq NH/_N$.

3.1.22 Fie G un grup, H şi N subgrupuri normale ale lui G astfel încât $H \subset N$. Arătaţi că $N/_H$ este subgrup normal al lui $G/_H$ şi există un izomorfism de grupuri $(G/_H)\,/\,(N/_H) \simeq G/_N$.

3.1.23 Fie K unul dintre corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ şi $\mathcal{M}_n(K)$ mulţimea matricilor pătrate de ordinul n cu elemente din K şi

$$GL_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \,|\, \det A \neq 0\},$$
$$SL_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \,|\, \det A = 1\}.$$

Să se arate că:
a) $(GL_n(K), \cdot)$ este un grup, numit grupul liniar general de gradul n peste K (pentru $n \geq 1$).
b) $(GL_n(K), \cdot)$ are un subgrup izomorf cu $(K^*, \cdot)$.
b) $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ are un subgrup izomorf cu $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
d) $SL_n(K)$ are un subgrup normal al lui $(GL_n(K), \cdot)$.
e) Arătaţi izomorfismul de grupuri multiplicativ: $GL_n(K)/_{SL_n(K)} \simeq K^*$.

3.1.24 Să se determine ordinele elementelor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

în $(GL_n(\mathbb{C}), \cdot)$ şi grupurile ciclice generate de acestea.

3.1.25 Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x, y \in G$ elemente permutabile, adică $xy = yx$. Fie $m = \text{ord}x$, $n = \text{ord}y$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:
a) $\text{ord}(xy)$ este finit şi $\text{ord}(xy)$ divide pe $[m, n]$, unde $[m, n]$ este c.m.m.m.c. al lui m şi n.
b) dacă $< x > \cap < y >= \{e\}$ atunci $\text{ord}(xy) = [m, n]$.
c) dacă $(m, n) = 1$ atunci $\text{ord}(xy) = m \cdot n$ şi $< x, y >=< x \cdot y >$.

3.1.26 Fie $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ şi "$\cdot$" operaţia definită în G astfel:

$$(m_1, m_2, m_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} (m_1 + n_1, m_2 + n_2, n_3), \text{ dacă } m_3 = 1 \\ (m_1 + n_2, m_2 + n_1, -n_3), \text{ dacă } m_3 = -1 \end{cases}$$

Să se arate că
1) $(G, \cdot)$ este un grup;
2) Subgrupul $H_1 =< (1, 0, 1), (0, 1, 1) >$ este normal în G;
3) Subgrupul $H_2 =< (1, 0, 1) >$ este normal în H, dar nu este normal în G, adică relaţia "$\trianglelefteq$" nu este tranzitivă.

3.1.27 Fie $n \in \mathbb{Z}$ şi $n\mathbb{Z} = \{nk \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că:
a) $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $m|n$ (m divide pe n);
b) $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z}$ şi $< m\mathbb{Z} \cup n\mathbb{Z} >= m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m, n)\mathbb{Z}$, unde (m, n) şi $[m, n]$ sunt c.m.m.d.c. şi respectiv c.m.m.m.c. al lui m şi n.

3.1.28 Să se dea câte un exemplu de ciclu (permutare circulară) de lungime 4, de transpoziţie şi de permutare care nu este ciclu.

3.1.29 a) Să se descompună în produs de cicluri disjuncte permutarea

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 12 & 8 & 11 & 6 & 7 & 5 & 3 & 2 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Să se scrie în două moduri ca produs de transpoziţii permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.1.30 Fie $\sigma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \ldots \circ \gamma_k$ descompunerea în cicluri disjunte a permutării $\sigma \in S_n$. Să se arate că ordσ coincide cu cel mai mic multiplu comun al ordinelor ciclurilor $\gamma_i (i = 1, 2, \ldots, k)$.

3.1.31 Aflaţi permutarea σ^{100} ştiind că:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 2 & 7 & 8 & 3 & 10 & 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 9 & 1 & 12 & 8 & 10 & 2 & 11 & 7 \end{pmatrix}$.

3.1.32 Fie $\sigma_1 = (1, 2, 3) \circ (4, 5, 6, 8), \sigma_2 = (3, 4) \circ (5, 2, 6, 1, 8), \sigma_3 = (1, 3, 4) \circ (2, 3, 5, 7) \circ (1, 8, 4, 6)$, $\sigma_4 = (8, 2, 1, 4, 3) \circ (1, 2) \circ (1, 5)$ şi $\sigma_5 = (8, 7, 4, 3, 1, 2) \circ (5, 6)$ permutări din S_8. Să se găsească $\sigma_1^3, \sigma_2^2 \circ \sigma_1$, $\sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_5$, $\sigma_3^4 \circ \sigma_4^2$ şi $\sigma_5 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3$.

3.1.33 a) Fie $\gamma = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in S_n$. Să se arate că pentru orice $\sigma \in S_n$ avem $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_k))$.

b) Fie $\sigma_1 = (1, 2, 3) \circ (4, 5, 6, 8)$, $\sigma_2 = (3, 4) \circ (5, 2, 6, 1, 8)$, $\sigma_3 = (1, 3, 4) \circ (2, 3, 5, 7) \circ (1, 8, 4, 6)$, $\sigma_4 = (8, 2, 1, 4, 3) \circ (1, 2) \circ (1, 5)$, $\sigma_5 = (8, 7, 4, 3, 1, 2) \circ (5, 6)$ permutări din S_8. Să se determine: $\sigma_1 \circ \sigma_4 \circ \sigma_1^{-1}$, $\sigma_5^{-2} \circ \sigma_3 \circ \sigma_5^2$, $\sigma_2^{-5} \circ \sigma_4 \circ \sigma_2^5$.

c) Fie $\sigma_1 = (1, 2, 3) \circ (4, 5, 6) \circ (7, 8, 9)$, $\sigma_2 = (1, 4, 7) \circ (2, 5, 8) \circ (3, 6, 9)$, $\sigma_3 = (4, 5, 6) \circ (7, 8, 9)$. Să se arate că $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ şi $\sigma_1 \circ \sigma_3 = \sigma_3 \circ \sigma_1$.

3.1.34 a) Să se precizeze ordinul fiecărui element al grupului S_3.

b) Să se determine toate subgrupurile lui $(S_3, \circ)$. Care dintre ele sunt normale?

c) Să se construiască diagrama laticii subgrupurilor sale.

d) Să se determine grupurile cât ale lui $(S_3, \circ)$.

3.1.35 Arătaţi că subgrupul generat de permutările $(1, 2) \circ (3, 4)$ şi $(1, 3) \circ (2, 4)$ din S_4 este izomorf cu grupul lui Klein.

Inele

3.1.36 Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ definim operaţiile

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y + a \\ x \odot y &= (x + a)(y + a) - a, \end{aligned}$$

unde $a \in \mathbb{Z}$ este un număr fixat.

a) Să se arate că tripletul $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ este un domeniu de integritate;

b) Să se determine grupul elementelor inversabile din acel inel.

3.1.37 Fie "*" operaţia definită pe $\mathbb{C}$ astfel

$$(a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i\,, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că $(\mathbb{C}, +, *)$ este un inel comutativ cu unitate care are divizori ai lui zero.

3.1.38 Fie A un inel în care orice element este idempotent, adică $x^2 = x$, pentru orice $x \in A$ (un asemenea inel se numeşte inel boolean). Să se arate că

a) $x + x = 0$, $(\forall)\, x \in A$;

b) A este comutativ.

c) Dacă $A \neq \{0\}$ este inel boolean fără divizori a lui zero, atunci el este izomorf cu $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$.

3.1.39 Pe mulţimea $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim legile de compoziţie

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2) \\ (a_1, b_1) * (a_2, b_2) &= (a_1 a_2 + 3 b_1 b_2,\ a_1 a_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Arătaţi că aceste legi de compoziţie conferă mulţimii A o structură de inel comutativ cu unitate şi fără divizori ai lui zero.

3.1.40 Fie $+$ şi $\top$ operaţiile definite pe $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ astfel:

$$\begin{array}{l}(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)\\ (a_1,b_1)\top(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1+b_1b_2).\end{array}$$

a) Să se arate că $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},+,\top)$ este un corp comutativ.

b) Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{Q}(\sqrt{-3})\to K,\ f(z)=(a-b,2b)\,,\ z\in\mathbb{Q}(\sqrt{-3}),\ z=a+b\sqrt{-3}$ cu $a,b\in\mathbb{Q}$ este un izomorfism de corpuri.

3.1.41 Să se arate că într-un inel cu unitate, comutativitatea adunării este o consecinţă a celorlalte axiome.

3.1.42 Să se dea exemplu de inel finit necomutativ. Există corpuri finite necomutative?

3.1.43 Fie $(R,+,\cdot)$ un inel cu $a,b\in R$. Să se arate că:

a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\Leftrightarrow a\cdot b=b\cdot a\Leftrightarrow a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

b) Dacă $ab=ba$ atunci pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n. \tag{*}$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+\ldots a\cdot b^{n-2}+b^{n-1}).$$

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}\cdot b+\ldots-a\cdot b^{2n-1}+b^{2n}).$$

3.1.44 Să se arate că dacă într-un inel $(R,+,\cdot)$ avem $x^6=x$ pentru orice $x\in R$, atunci $x^2=x$ pentru orice $x\in R$.

3.1.45 Să se rezolve în $\mathbb{Z}_{12}$ ecuaţiile: $\widehat{4}x+\widehat{5}=\widehat{9}\,;\ \widehat{5}x+\widehat{5}=\widehat{9}$ şi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuaţia

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}.$$

3.1.46 În $\mathbb{Z}_{12}$ să se determine divizorii lui zero şi să se rezolve sistemul

$$\begin{cases}\widehat{3}x+\widehat{4}y=\widehat{11}\\ \widehat{4}x+\widehat{9}y=\widehat{10}\end{cases}.$$

3.1.47 Fie $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in Z\}$ şi $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$, adică $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\cdot\sqrt{2}$ şi $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\cdot\sqrt{2}$. Să se arate că:

i) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este un subinel al lui $(R,+,\cdot)$ care conţine pe 1 şi acest subinel este generat de $\{1,\sqrt{2}\}$.

ii) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ este un subcorp al lui $(R,+,\cdot)$ şi acest corp este generat de $\sqrt{2}$.

iii) $S_1=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ nu este subinel al lui $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

iv) $S_2=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ nu este subcorp al lui $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

3.1.48 Fie $d\in\mathbb{Z}$ un întreg liber de pătrate (adică $d\neq1$ şi d nu se divide prin pătratul nici unui număr prim) şi funcţia $\delta:\mathbb{Z}[\sqrt{d}]\to\mathbb{N}\,,\ \sigma(z)=|z\cdot\overline{z}|$ unde cu $\overline{z}=a-b\sqrt{d}$ s-a notat conjugatul lui $z=a+b\sqrt{d}\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Să se arate că z este inversabil în $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ dacă şi numai dacă $\delta(z)=1$.

3.1.49 Să se arate că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ are o infinitate de elemente inversabile.

3.1.50 a) Să se arate că

$$R=\left\{\left.\begin{pmatrix}a&b\\2b&a\end{pmatrix}\right|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$$

este subinel al lui $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ şi că R este domeniu de integritate în raport cu operaţiile induse.

b) Să se arate că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este izomorf cu inelul R.

3.1.51 Să se arate că $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ şi inelul $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ din problema 3.1.30 pentru $a = 3$ sunt izomorfe.

3.1.52 Fie A un inel cu element unitate cu $0 \neq 1$, în care $x^2 = 1$, pentru orice $x \in A \setminus \{0\}$. Să se arate că A este izomorf cu unul din corpurile $\mathbb{Z}_2$ sau $\mathbb{Z}_3$.

3.1.53 Dacă $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ este un morfism de corpuri, atunci $f(x) = x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{Q}$, adică singurul omomorfism nenul de corpuri de la $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ la $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este omomorfismul de incluziune. Determinaţi apoi automorfismele corpului $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

3.1.54 Să se determine endomorfismele şi automorfismele inelelor $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

3.1.55 Fie R un inel comutativ şi unitar. Să se arate că mulţimea $N(R) = \{a \in R \,|\, (\exists)\, m \in \mathbb{Z}_+^*$ astfel încât $a^m = 0\}$ formează un ideal al lui R. Este esenţială comutativitatea?

3.1.56 Fie $(R, +, \cdot)$ un inel şi fie A, B două ideale ale lui R.

a) Fie $A : B = \{r \in R \,|\, (\forall)\, b \in B, r \cdot b \in A\}$. Să se arate că $A : B$ este un ideal bilateral al lui R. Idealul $A : B$ se numeşte câtul perechii (A, B).

b) În $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ avem $n\mathbb{Z} : m\mathbb{Z} = \dfrac{[m,n]}{m}\mathbb{Z}\, (m, n \in \mathbb{N}, m \neq 0)$.

3.1.57 Fie m şi n numere întregi pozitive astfel încât $(m, n) = 1$. Arătaţi că $\mathbb{Z}_{mn}$ şi $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ sunt izomorfe.

3.1.58 Arătaţi că dacă I şi J sunt două ideale ale unui inel $(R, +, \cdot)$ cu proprietatea că $I + J = R$ atunci $R/_{I \cap J}$ este omomorf cu $R/_I \times R/_J$.

3.1.59 Considerând inelul polinoamelor cu coeficienţi reali în nedeterminata X, $\mathbb{R}[X]$ şi aplicaţia $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(P) = P(1)$, $P \in \mathbb{R}[X]$, arătaţi că $\mathbb{R}[X]/_{(X-1)} \simeq \mathbb{R}$ unde $(X - 1)$ este idealul principal generat de polinomul $X - 1$.

3.1.60 Determinaţi idealele şi inelele cât ale inelului $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

3.1.61 Fie $\widehat{r} \in \mathbb{Z}_n$ şi $n > 1$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) clasa $\widehat{r}$ nu este divizor al lui zero în $\mathbb{Z}_n$.

b) $\widehat{r}$ este un element inversabil în $\mathbb{Z}_n$.

c) numerele r şi n sunt relativ prime.

3.1.62 Determinaţi idealele lui $\mathbb{Z}_{21}$ inelul claselor de convergenţă modulo 21 şi inelele cât în raport cu aceste ideale.

3.1.63 Fie M o mulţime nevidă şi $\mathcal{P}(M)$ mulţimea părţilor lui M. Tripletul $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ este un inel cu unitate în raport cu diferenţa simetrică respectiv intersecţia submulţimilor, izomorf cu inelul $(\mathbb{Z}_2^M, +, \cdot)$ al funcţiilor definite pe M cu valori în inelul claselor de resturi modulo 2.

3.2 Soluţii

Grupuri

3.2.1 a) Vom verifica axiomele grupului arătând mai întâi că pentru orice $x, y \in (-1, 1)$ avem $x * y \in (-1, 1)$. Fie $x, y \in G$. Avem

$$\left.\begin{array}{l} -1 < x < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \\ -1 < y < 1 \Leftrightarrow |y| < 1 \Rightarrow y^2 < 1 \Rightarrow y^2 - 1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x^2 - 1)(y^2 - 1) > 0.$$

Prin urmare de aici rezultă

$$x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2y^2 + 1 > x^2 + y^2 \Rightarrow x^2y^2 + 2xy + 1 > x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l}(xy+1)^2 > (x+y)^2 \\ x,y\in G \Rightarrow xy \neq -1 \Rightarrow xy+1\neq 0\end{array}\right| \Rightarrow \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 < 1 \Rightarrow \left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x*y\in G\,,\ (\forall)\ x,y\in G.$$

Asociativitatea: $(x*y)*z = x*(y*z)\,,\ (\forall)\ x,y,z\in G.$

$$\left.\begin{array}{l}(x*y)*z = \dfrac{x+y}{1+xy}*z = \dfrac{\dfrac{x+y}{1+xy}+z}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}\cdot z} = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \\ x*(y*z) = x*\dfrac{y+z}{1+xy} = \dfrac{x+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+x\cdot\dfrac{y+z}{1+yz}} = \dfrac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz} = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x*y)*z = x*(y*z)\,,\ (\forall)\ \ x,y,z\in G \Leftrightarrow \text{"}*\text{" este asociativă.}$$

Comutativitatea: $(\forall)\ x,y\in G \Rightarrow x*y = y*x.$

$$x*y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+xy} = y*x\,,\ (\forall)\ x,y\in G \Rightarrow \text{"}*\text{" este comutativă.}$$

Element neutru: Demonstrăm că $(\exists)\ e\in G$ astfel încât $e*x = x*e = x\,,\ (\forall)\ x\in G.$ Ecuaţia

$$x*e = x \Rightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \Leftrightarrow x+e = x+x^2e\,,\ (\forall)\ x\in G.$$

$$x^2e - e = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e(x^2-1)=0 \\ x^2\neq 1\end{array}\right| \Rightarrow e = 0\in G \Rightarrow e=0 \text{ element neutru.}$$

Element simetrizabil. Arătăm că $(\forall)\ x\in G\,,\ (\exists)\ x'\in G$ astfel încât $x*x' = x'*x = e.$

$$x*x' = 0 \Rightarrow \frac{x+x'}{1+x\cdot x'} = 0 \Leftrightarrow x' = -x.$$

Din $(\forall)\ x\in G \Leftrightarrow -1<x<1 \Rightarrow 1>-x>-1 \Leftrightarrow -x\in(-1,1) \Leftrightarrow x'\in(-1,1)=G.$

În concluzie $(G,*)$ este grup abelian.

b) Pentru a demonstra izomorfismul cerut verificăm că f este un omomorfism bijectiv.

Injectivitatea:

$$f(x)=f(y) \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1} \Leftrightarrow xy+x-y-1 = xy-x+y-1.$$

De aici avem $2x=2y \Leftrightarrow x=y$, deci f este injectivă. Fie $y=f(x);\ y\in(-1,1)$. Avem

$$y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow xy+y = x-1 \Rightarrow x(1-y) = y+1 \Rightarrow x = \frac{1+y}{1-y}\in(0,\infty).$$

Am arătat că $(\forall)\,y\in(-1,1)\,,\ (\exists)\,x\in(0,\infty)$ astfel încât $f(x)=y,$ deci aplicaţia f este surjectivă. În concluzie f este bijectivă.

Omomorfism: $f(x\cdot y) = f(x)*f(y)\,,\ (\forall)\,x,y\in(0,\infty)$

$$f(x\cdot y) = \frac{xy-1}{xy+1}. \tag{1}$$

$$f(x)*f(y) = \frac{x-1}{x+1}*\frac{y-1}{y+1} = \frac{\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{y-1}{y+1}}{1+\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{y-1}{y+1}} = \frac{xy+y-y-1+xy-x+y-1}{xy+x+y+1+xy-x-y+1} =$$

$$= \frac{2xy-2}{2xy+2} = \frac{xy-1}{xy+1}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$. Prin urmare avem $(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \simeq (G, *)$.

3.2.2 a) Reamintim că prin permutări ale unei mulţimi nevide M înţelegem elementele inversabile ale monoidului $(M^M, \circ)$, adică aplicaţiile bijective definite pe M cu valori în M. Cum compusa a două bijecţii este tot o bijecţie, rezultă că $(\mathcal{S}_M, \circ)$ este grup.

În particular, $(\mathcal{S}_\mathbb{R}, \circ)$ este grup şi dacă $a \in \mathbb{R}^*$ rezultă că $f_{a,b} \in \mathcal{S}_\mathbb{R}$. Avem $A \neq \emptyset$ şi

$$(f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = f_{a,b}(cx+d) = acx + ad + b = f_{ac,ad+b}(x)\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

De aici

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,ad+b} \in A\ (a \neq 0, c \neq 0 \text{ şi } ac \neq 0). \tag{*}$$

Dacă $ax + b = y$, $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$ atunci $f_{a,b}^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, deci

$$f_{a,b}^{-1} = f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}. \tag{**}$$

Din (*) şi (**) rezultă că A este subgrup al lui $(\mathcal{S}_\mathbb{R}, \circ)$. În particular, $(A, \circ)$ este grup.

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$, $g \in \mathcal{S}_\mathbb{R}$ Ea are inversa $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Pentru ca A să fie subgrup normal în grupul $(\mathcal{S}_\mathbb{R}, \circ)$ ar trebui ca

$$g^{-1} \circ f_{a,b} \circ g \in A\,,\ (\forall)\ f_{a,b} \in A.$$

Avem

$$(g^{-1} \circ f_{a,b} \circ g)(x) = g^{-1}(f_{a,b}(g(x))) = g^{-1}(f_{a,b}(x^3)) = g^{-1}(ax^3 + b) = \sqrt[3]{ax^3 + b} \notin A,$$

pentru $b \neq 0$. Deci A nu este subgrup normal în $\mathcal{S}_\mathbb{R}$.

b) Conform punctului a) avem $f_{1,b} \circ f_{1,c} = f_{1,c+b} = f_{1,b+c} = f_{1,c} \circ f_{1,b}$, $f_{1,b}^{-1} = f_{1,-b}$ ceea ce ne arată că T este subgrup abelian al lui $(A, \circ)$.

Fie $F : T \to \mathbb{R}$, $F(f_{1,b}) = b$. Aplicţia F este un omomorfism bijectiv al lui $(T, \circ)$ pe $(\mathbb{R}, +)$. Într-adevăr $(\forall)\ f_{1,b}; f_{1,c} \in T,$ avem $F(f_{1,b} \circ f_{1,c}) = F(f_{1,c+b}) = c + b = b + c = F(f_{1,b}) + F(f_{1,c})$, de unde rezultă că F este omomorfism de grupuri.

Bijectivitatea. Dacă $F(f_{1,b}) = F(f_{1,c}) \Rightarrow b = c \Rightarrow f_{1,b} = f_{1,c} \Rightarrow F$ este injectivă. Surjectivitatea rezultă imediat.

c) Conform punctului a) avem: $f_{a,0} \circ f_{c,0} = f_{ac,0} \in S$ şi $f_{a,0}^{-1} = f_{\frac{1}{a},0} \in S$ ceea ce arată că S este subgrup al lui $(A, \circ)$. Mai mult,

$(f_{a,0} \circ f_{c,0})(x) = f_{ac,0}(x) = acx = cax = f_{ca,0}(x) = (f_{c,0} \circ f_{a,0})(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

$$f_{a,0} \circ f_{c,0} = f_{c,0} \circ f_{a,0}\,,\ (\forall)\, f_{a,0}; f_{c,0} \in S.$$

Rezultă că S este subgrup abelian al lui A.

Totodată $(\forall)\, f_{e,d} \in A, (\forall)\, f_{a,0} \in S : f_{c,d}^{-1} \circ f_{a,0} \circ f_{c,d} = f_{\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}} \circ f_{ac,ad} = f_{a, \frac{ad}{c} - \frac{d}{c}} \notin S$ dacă $d \neq 0$, deci S nu este subgrup normal în $(A, \circ)$.

Izomorfismul cerut se arată foarte uşor.

d) S-a arătat la punctul b) că $(T, \circ)$ este subgrup abelian al lui A. Mai trebuie arătat că este subgrup normal al lui A. Într-adevăr

$(\forall)\, f_{c,d} \in A$ şi $(\forall)\ f_{1,b} \in T$ avem

$$f_{c,d}^{-1} \circ f_{1,b} \circ f_{c,d} = f_{\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}} \circ f_{1,b} \circ f_{c,d} = f_{\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}} \circ f_{c,d+b} = f_{1, \frac{d+b}{c}, -\frac{d}{c}} = f_{1, \frac{b}{c}} \in T.$$

Deci subgrupul T este normal în $(A, \circ)$.

Aplicţia $\varphi : A \to \mathbb{R}^*$, $\varphi(f_{a,b}) = a$ este un omomorfism surjectiv al lui $(A, \circ)$ pe $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Într-adevăr $\varphi(f_{a,b} \circ f_{c,d}) = \varphi(f_{ac,ad+b}) = ac = \varphi(f_{a,b}) \circ \varphi(f_{c,d})$, deci φ este un omomorfism de grupuri.

Surjectivitatea este imediată.

Conform primei teoreme de izomorfism avem $A/_{Ker\varphi} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^*$.

$$Ker\varphi = \{f_{a,b} \in A \,|\, \varphi(f_{a,b}) = 1\} = \{f_{a,b} \in A \,|\, a = 1\} = \{f_{1,b} \,|\, b \in \mathbb{R}\} = T.$$

În concluzie $A/_T \simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Din considerente similare cu cele de la punctul a) rezultă că T nu este subgrup normal în $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}}, \circ)$.

3.2.3 Prin definiţie centrul grupului este $Z(S_3) = \{\sigma \in S_3 | \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma\,,\ (\forall)\,\tau \in S_3\}$. Evident $e \in Z(S_3)$. Fie $\sigma \in Z(S_3)$, $\sigma \neq e$. Atunci există $i, j \in \{1, 2, 3\}$ astfel încât $i \neq j$ şi $\sigma(i) = j$. Fie $k \in \{1, 2, 3\}$, $k \neq i$, $k \neq j$. Fie permutarea $\tau \in S_3$ definită astfel $\tau(i) = i$, $\tau(j) = k$ şi $\tau(k) = j$. Deoarece $\sigma \in Z(S_3)$ avem $\sigma(\tau(i)) = \tau(\sigma(i)) \Rightarrow \sigma(i) = \tau(j) \Rightarrow j = k$. Fals! Rezultă $Z(S_3) = \{e\}$. Analog se arată că $Z(S_n) = \{e\}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 3$.

3.2.4 Fie $G =< a >$ grup ciclic generat de a, ord $a = +\infty$, deci $G < a >= \{a^k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Deorece $G \simeq \mathbb{Z}$ şi subgrupurile lui $\mathbb{Z}$ sunt de forma $n\mathbb{Z} =< n >$, deci ciclice rezultă că subgrupurile lui G sunt ciclice. Fie $G =< a >$ grup ciclic finit, ord $a = n$ şi fie H un subgrup al lui G.

Dacă $H = \{e\}$ atunci evident H este ciclic, $H =< e >$.

Dacă $H \neq \{e\}$ atunci există $x \in H$, $x \neq e$. Dar $x \in G$, adică $x = a^k$, $k \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in H \\ H \leq G \end{array}\right| \Rightarrow x^{-1} \in H \Rightarrow (a^k)^{-1} = a^{-k} \in H \Rightarrow (\exists)\ r > 0 \text{ astfel încât } a^r \in H.$$

Este suficient să luăm $r = \begin{cases} k & \text{pentru } k > 0 \\ -k & \text{pentru } k < 0 \end{cases}$.

Mulţimea numerelor naturale $M = \{n \,|\, a^n \in H, n > 0\}$ este nevidă şi cum mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale este bine ordonată rezultă că M are cel mai mic element m. Vom arăta că $H =< a^m >$.

Fie $x \in< a^m >$, deci $x = (a^m)^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Dar H este subgrup al lui G şi $a^m \in H$. Rezultă că $x = (a^m)^k \in H$, adică

$$< a^m > \subseteq H. \tag{$*$}$$

Fie $y \in H \Rightarrow y \in G$ adică $y = a^t$, $|t| \geq m$, $t \in \mathbb{Z}$.

După teorema împărţirii cu rest pentru numere întregi avem $t = mq + r$, unde $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < m$. Deci

$$y = a^t = a^{mq+r} = (a^m)^q \cdot a^r \Rightarrow a^r = (a^m)^{-q} \cdot y \in H$$

Observaţie. Dacă $G =< a >$, $|G| = n$ atunci $G \simeq \mathbb{Z}_n$, izomorfismul fiind realizat de aplicaţia $f : \mathbb{Z}_n \to G$, $f < \widehat{k} > a^k$. Avem

$$\mathbb{Z}_n =< \widehat{k} > \simeq (k, n) = 1.$$

Rezultă că

$$< a^k >= G \Leftrightarrow (k, n) = 1.$$

Deoarece m este cel mai mic număr al lui M rezultă că $r = 0$. Deci $t = mq$ şi

$$y = a^{mq} = (a^m)^q \in< a^m >$$

$$H \subseteq< a^m > \tag{$**$}$$

Din $(*)$ şi $(**)$ rezultă că $H =< a^m >$.

3.2.5 a) Fie $k = [m, n]$ şi $d = (m, n)$. Dacă $m = dk_1$, $n = dk_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $(k_1, k_2) = 1$, atunci $k = k_1 k_2 d = m k_2 = k_1 m$. Deorece $xy = yx$ avem

$$(xy)^k = x^k \cdot y^k = (x^m)^{k_2} \cdot (y^n)^{k_1} = e \cdot e = e \Rightarrow \text{ord}\,(x, y) \,|\, k.$$

Rezultă că ord (xy) este finit şi ord $(xy) \,|\, [m, n]$.

b) Dacă ord $(xy) = a$, din faptul că $xy = yx$ rezultă $x^a \cdot y^a = (xy)^a = e$ ceea ce implică $x^a = y^{-a}$. Dar $x^a \in< x >$ şi $y^{-a} \in< y >$, de unde $x^a = y^{-a} \in< x > \cap < y >$.

Deoarece

$$\left.\begin{array}{l} < x > \cap < y > \subseteq < y > \Rightarrow \text{ord } (< x > \cap < y >) \,|\, m \\ < x > \cap < y > \subseteq < y > \Rightarrow \text{ord } (< x > \cap < y >) \,|\, n \end{array}\right| \text{rezultă că ord}(< x > \cap < y >) = 1.$$

Dacă

$$< x > \cap < y > = \{e\} \Rightarrow x^a = y^{-a} = e \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m \,|\, a \\ n \,|\, a \end{array}\right| \Rightarrow [m,n] \,|\, a,$$

ceea ce împreună cu punctul a) conduce la $a = [m,n]$.

c) Din teorema lui Lagrange avem $|< x > \cap < y >|$ divide pe $m = |< x >|$ şi pe $n = |< y >|$. Dar cum $(m,n) = 1$ avem $|< x > \cap < y >| = 1$. În consecinţă $< x > \cap < y > = \{e\}$. Aşadar $\text{ord}(xy)\,[m,n] = mn$. Avem că $< xy > \subseteq < x,y >$. Deoarece $(m,n) = 1$ rezultă că există $u,v \in \mathbb{Z}$. Astfel încât $um + vn = 1$. Deci

$$x = x^{um+vn} = (x^m)^n \cdot x^{vn} = x^{vn} = x^{vn} \cdot (y^n)^v = (xy)^{vn}$$

şi analog, $y = (xy)^{um}$. Deci $x, y \in < x,y >$, ceea ce implică $< x,y > \subseteq < xy >$.
În concluzie, dacă $(m,n) = 1$ avem $< x,y > = < x,y >$.

3.2.6 Presupunem că $H \cup K$ este subgrup al lui G, $H \nsubseteq K$ şi $K \nsubseteq H$. Rezultă că există $h \in H \backslash K$ şi există $k \in K \backslash H$. Rezultă $h,k \in H \cup K$. Dar $H \cup K$ este subgrup al lui G şi deci

$$h \cdot k \in H \cup K \Rightarrow h \cdot k \in H \ \vee \ h \cdot k \in K \Rightarrow k \in H \ \vee \ h \in K.\text{Fals!}$$

$$(k = h^{-1} \cdot (h \cdot k) \in H \ \vee \ h = (h \cdot k) \cdot k^{-1} \in K).$$

În concluzie, $H \subseteq K \vee K \subseteq H$.

Implicaţia inversă este evidentă.

3.2.7 a) Presupunem că există H, K subgrupuri proprii ale lui G astfel încât $H \cup K = G$, $H \neq G$, $K \neq G$. Dacă $H \subseteq K \vee K \subseteq K \Rightarrow G = H \vee G = K$. Fals! Rezultă că $H \nsubseteq K$ şi $K \nsubseteq H$, adică există $x, y \in G$ astfel încât $x \in H \setminus K$ şi $y \in K \setminus H$, $x \cdot y \in G = K \cup H$. Avem $x \cdot y \in K \vee x \cdot y \in H$. Presupunem că $xy \in H$, $x \in H$ de unde $y = x^{-1} \cdot (x \cdot y) \in H$. Fals! Analog $xy \in K$, $y \in K$ de unde $x = (x \cdot y) \cdot y^{-1} \in K$. Fals!

În concluzie, nu există H, K subgrupuri proprii ale lui G astfel încât $H \cup K = G$.

b) Fie $(K, \cdot)$ grupul lui Klein $K = \{e,a,b,c\}, a^2 = b^2 = c^2 = e$. $K_1 = \{e,a\}$, $K_2 = \{e,b\}$, $K_3 = \{e,c\}$. K_1, K_2, K_3 sunt subgrupuri ale lui K şi $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$.

3.2.8 Avem $U_6 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^6 = 1\}$ adică U_6 este mulţimea rădăcinilor de ordinul 6 al unităţii

$$z^6 = 1 \Rightarrow z_k = \cos\frac{2k\pi}{6} + i \sin\frac{2k\pi}{6}, k = \overline{0,5}.$$

$$U_6 = (z_0 = 1, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}.$$

Avem $z_k = z_1^k$, $k = \overline{0,5}$, $U_6 = < z_1 > = < z_1^5 >$. Pentru $(\forall)\, k, l \in \{0,1,2,3,4,5\}$ avem $z_k \cdot z_l = z_r$, unde r este restul împărţirii lui $k + l$ la 6, deci tabla operaţiei este următoarea

$\cdot$	1	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
1	1	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_1	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	1
z_2	z_2	z_3	z_4	z_5	1	z_1
z_3	z_3	z_4	z_5	1	z_1	z_2
z_4	z_4	z_5	1	z_1	z_2	z_3
z_5	z_5	1	z_1	z_2	z_3	z_4

ord z_0 =ord1 $= 1$; ord z_1 =ord $z_5 = 6$
ord z_2 =ord $z_4 = 3$; $(z_2 \cdot z_2 = z_4$ şi $z_2^3 = z_4 \cdot z_2 = 1)$
ord $z_3 = 2$.

Deoarece orice subgrup al unui grup ciclic este ciclic, subgrupurile lui U_6 sunt ciclice şi sunt date de $< z_k >$, $k = 0,1,2,3,4,5$.

Avem:

$$\begin{aligned}
&H_1 = < z_0 > = < 1 > = \{1\}\\
&H_2 = < z_1 > = < z_5 > = U_6\\
&H_3 = < z_2 > = \{1, z_2, z_2^2 = z_4\} = < z_4 >\\
&H_4 = < z_3 > = \{1, z_3\} = \{1, z_1^3\}.
\end{aligned}$$

Laticea

$$S(U_6) = \{\{1\}, \{1, z_3\}, \{1, z_2, z_4\}, U_6\}$$

a subgrupurilor lui U_6 are diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_2 = U_6 & & \\ & / & & \backslash & \\ H_3 & & & & H_4 \\ & \backslash & & / & \\ & & H_1 & & \end{array}$$

3.2.9 a) Dacă $f \in End(\mathbb{Z}, +)$ rezultă că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ avem:

$$f(n) = f(1 + 1 + ... + 1) = f(1) + f(1) + \ldots f(1) = n \cdot f(1)$$

$$f(0) = 0 = 0 \cdot f(1),$$

însumările făcându-se de $n-$ori.

Fie $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. Atunci $-n > 0$ şi întrucât f este endomorfism avem

$$f(n) = f(-(-n)) = -f(-n) = -(-n) \cdot f(1) = nf(1).$$

De aici avem $f(n) = n \cdot f(1)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$.

b) Ţinând seama de punctul a) avem $f(0) = 0 \cdot f(1)$. Mai mult, pentru orice număr raţional, fie acesta $r \in \mathbb{Q}^*$, $r = \dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, $m > 0$, scriind numărul ca o sumă de m termeni egali cu $\dfrac{1}{n}$, din faptul că $f \in End(\mathbb{Q}, +)$ avem

$$f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = m \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(\forall)\, k \in \mathbb{N}^*,\ f(1) = f\left(\frac{k}{k}\right) = k \cdot f\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} \cdot f(1)$$

Pentru $k \in \mathbb{Z}, k < 0$, $f\left(\dfrac{1}{k}\right) = f\left(-\left(-\dfrac{1}{k}\right)\right) = -f\left(-\dfrac{1}{k}\right) = -\left(-\dfrac{1}{k}\right) \cdot f(1) = \dfrac{1}{k} f(1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} \cdot f(1)\ (\forall)\ k \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow f(r) = m \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot f(1) = r \cdot f(1),\ (\forall)\ r \in \mathbb{Q}.$$

3.2.10 Conform problemei 3.2.9 am văzut că dacă $f \in End(\mathbb{Z}, +)$ atunci

$$f(x) = x \cdot f(1)\, (\forall)\ x \in \mathbb{Z},$$

adică f este o translaţie a lui $(\mathbb{Z}, \cdot)$ şi deci $f = t_{f(1)}$. $(\forall)\ a \in \mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}, +)$ grup $t_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $t_a(x) = ax$ translaţia lui $(\mathbb{Z}, \cdot)$

$$t_a(x + y) = (x + y)a = xa + ya = t_a(x) + t_a(y) \Rightarrow t_a \in End(\mathbb{Z}, +).$$

Rezultă că End$(\mathbf{Z}, +) = \{t_a \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

Analog se arată că endomorfismele grupului $(\mathbb{Q}, +)$ coincid cu translaţiile lui $(\mathbb{Q}, \cdot)$.

$$\begin{aligned}
&End(\mathbb{Q}, +) = \{t_a \mid a \in \mathbb{Q}\};\\
&Aut(\mathbb{Z}, +) = \{t_1 . t_{-1}\} \simeq (\mathbb{Z}_2, +);\\
&Aut(\mathbb{Q}, +) = \{t_a \mid a \in \mathbb{Q}^*\}.
\end{aligned}$$

3.2.11 $\mathbb{Z} =< 1 >=< -1 >$. Rezultă că oricare subgrup al său este ciclic. $H = n\mathbb{Z} =< n >=< -n >$.

$$x\rho_{n\mathbb{Z}}y \Leftrightarrow -x+y \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow y-x \in n\mathbb{Z} \rightarrow y \in x+n\mathbb{Z}.$$

Mulţimea cât $\mathbb{Z}/_{\rho_H} = \mathbb{Z}/_{\rho_{nZ}} \stackrel{\text{not}}{=} \mathbb{Z}_n$; $|\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = n$. Subgrupul $n\mathbb{Z}$ are în $\mathbb{Z}$ indicele n şi $\{0,1,2,\dots n-1\}$ este un sistem de reprezentanţi pentru $\mathbb{Z}_n$.

Într-adevăr, $0 \le i < j \le n-1 \Leftrightarrow j-i \notin n\mathbb{Z} \Rightarrow i+n\mathbb{Z} \neq j+n\mathbb{Z} \Rightarrow$ numerele $0,1,\dots,n-1$ sunt situate în clase diferite. Dacă $k \in \mathbb{Z}$ şi $|\,k| > n$ $(\exists)\, q,r \in \mathbb{Z}$ astfel încât $k = nq+r$, $0 \le r < n$, $k+n\mathbb{Z} = nq+r+n\mathbb{Z} = r+n\mathbb{Z}$. Prin urmare $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ este un sistem de reprezentanţi pentru $\mathbb{Z}_n$, adică

$$\mathbb{Z}_n = \{n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, 2+n\mathbb{Z},\dots,(n-1)+n\mathbb{Z}\} = \{\widehat{0},\widehat{1},\widehat{2},\dots,\widehat{n-1}\},\ i+n\mathbb{Z} \stackrel{\text{not.}}{=} \widehat{i}.$$

În grupul cât $(\mathbb{Z}_n,+)$ operaţia "+" este definiă astfel

$$(i+n\mathbb{Z}+j+n\mathbb{Z}) = (i+j)+n\mathbb{Z} \text{ sau } \widehat{i}+\widehat{j} = \widehat{i+j}.$$

Elementul nul al acesteui grup este $n\mathbb{Z} = \widehat{0}$.

Dacă $i \in \mathbb{Z}$ atunci opusa clasei $i+n\mathbb{Z}$ este $-i+n\mathbb{Z}$.

Grupul $(\mathbb{Z}_n,+)$ se numeşte grupul aditiv al întregilor modulo n; $\mathbb{Z}_n =< 1+n\mathbb{Z} >=< \widehat{1} >$.

3.2.12 Întrucât $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ rezultă că subgrupurile lui $\mathbb{Z}_n$ sunt de forma $H/_{n\mathbb{Z}}$ unde H este subgrup al lui $(\mathbb{Z},+)$ cu proprietatea $Ker\, f = n\mathbb{Z} \subseteq H = d\mathbb{Z} \Leftrightarrow d|n$. În concluzie subgrupurile lui $\mathbb{Z}_n$ sunt generate de clasa d unde $d|n$.

3.2.13 Fie $(\mathbb{Z}_{12},+)$, $d_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$. Subgrupurile lui $(\mathbb{Z}_{12},+)$ sunt:

$$\begin{aligned}
&H_1 = 1\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{12} =< \widehat{1} >=< \widehat{5} >=< \widehat{7} >=< \widehat{11} >\\
&H_2 = 2\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} = \widehat{2}\cdot\mathbb{Z}_{12} =< \widehat{2} >= \{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4},\widehat{6},\widehat{8},\widehat{10}\}\\
&H_3 = 3\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} = \widehat{3}\cdot\mathbb{Z}_{12} =< \widehat{3} >= \{\widehat{0},\widehat{3},\widehat{6},\widehat{9}\}\\
&H_4 = 4\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} = \widehat{4}\cdot\mathbb{Z}_{12} =< \widehat{4} >= \{\widehat{0},\widehat{4},\widehat{8}\}\\
&H_5 = 6\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} = \widehat{6}\cdot\mathbb{Z}_{12} = \{\widehat{0},\widehat{6}\}\\
&H_6 = 12\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} = \widehat{0}\cdot\mathbb{Z}_{12} =< \widehat{0} >= \{\widehat{0}\}
\end{aligned}$$

Grupurile cât au următoarele mulţimi suport:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_{12}/H_1 &= \mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_{12} = \{\mathbb{Z}_{12}\};\\
\mathbb{Z}_{12}/H_2 &= \{\widehat{a}+H_2|\widehat{a}\in\mathbb{Z}_{12}\} = \{H_2,\widehat{1}+H_2\} = \{\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4},\widehat{6},\widehat{8},\widehat{10}\},\{\widehat{1},\widehat{3},\widehat{5},\widehat{7},\widehat{9},\widehat{11}\} \simeq \mathbb{Z}_2\\
\mathbb{Z}_{12}/H_3 &= \{\widehat{a}+H_3|\widehat{a}\in\mathbb{Z}_{12}\} = \{H_3,\widehat{1}+H_3,\widehat{2}+H_3\} =\\
&= \{\{\widehat{0},\widehat{3},\widehat{6},\widehat{9}\},\{\widehat{1},\widehat{4},\widehat{7},\widehat{10}\},\{\widehat{2},\widehat{5},\widehat{8},\widehat{11}\}\} \simeq \mathbb{Z}_3\\
\mathbb{Z}_{12}/H_4 &= \{\widehat{a}+H_4|\widehat{a}\in\mathbb{Z}_{12}\} = \{H_4,\widehat{1}+H_4,\widehat{2}+H_4,\widehat{3}+H_4\} =\\
&= \{\{\widehat{0},\widehat{4},\widehat{8}\},\{\widehat{1},\widehat{5},\widehat{9}\},\{\widehat{2},\widehat{6},\widehat{10}\},\{\widehat{3},\widehat{7},\widehat{11}\}\} \simeq \mathbb{Z}_4\\
\mathbb{Z}_{12}/H_5 &= \{\widehat{a}+H_5|\widehat{a}\in\mathbb{Z}_{12}\} = \{H_5,\widehat{1}+H_5,\widehat{2}+H_5,\widehat{3}+H_5,\widehat{4}+H_5,\widehat{5}+H_5\} =\\
&= \{\{\widehat{0},\widehat{6}\},\{\widehat{1},\widehat{7}\},\{\widehat{2},\widehat{8}\},\{\widehat{3},\widehat{9}\},\{\widehat{4},\widehat{10}\},\{\widehat{5},\widehat{11}\}\} \simeq \mathbb{Z}_6\\
\mathbb{Z}_{12}/H_6 &= \{\{\widehat{i}\}|\ \widehat{i}\in\mathbb{Z}_{12}\} = \{\{\widehat{0}\},\{\widehat{1}\},\{\widehat{2}\},\{\widehat{3}\},\{\widehat{4}\},\{\widehat{5}\},\{\widehat{6}\},\{\widehat{7}\},\{\widehat{8}\},\{\widehat{9}\},\{\widehat{10}\},\{\widehat{11}\}\} \simeq \mathbb{Z}_{12}.
\end{aligned}$$

3.2.14 a) Mulţimea este nevidă $H \neq \emptyset$ deoarece $1 \in H$. Totodată $(\forall)\, z_1,z_2 \in H \Rightarrow |\,z_1| = 1$; $|\,z_2| = 1$, $|\,z_1\cdot z_2| = |\,z_1|\cdot|\,z_2| = 1\cdot 1 = 1 \Rightarrow z_1\cdot z_2 \in H$. Mai mult oricare ar fi $z \in H$ şi $z^{-1} \in \mathbb{C}^*$, $z\cdot z^{-1} = 1 = \left|\,z\cdot z^{-1}\right| = 1 \Leftrightarrow |\,z|\cdot\left|\,z^{-1}\right| = 1 \Rightarrow 1\cdot\left|\,z^{-1}\right| = 1$. Deci $\left|\,z^{-1}\right| = 1 \Rightarrow z^{-1} \in H$, adică H este subgrup al lui $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

b) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $f(x) = \cos 2\pi x + i\sin 2\pi x$. Deoarece

$$\begin{aligned}
&f(x_1)\cdot f(x_2) = (\cos 2\pi x_1 + i\sin 2\pi x_1)\cdot(\cos 2\pi x_2 + i\sin 2\pi x_2) =\\
&= (\cos 2\pi x_1\cdot\cos 2\pi x_2 - \sin 2\pi x_1\cdot\sin 2\pi x_2) + i(\cos 2\pi x_1\cdot\sin 2\pi x_2 + \sin 2\pi x_1\cdot\cos 2\pi x_2) =\\
&= \cos 2\pi(x_1+x_2) + i\sin 2\pi(x_1+x_2) = f(x_1+x_2),\ (\forall)\, x_1,x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

funcţia este omomorfism al lui $(\mathbb{R},+)$ în $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

$$\begin{aligned} Ker\, f &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=1\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\cos 2\pi x+i\sin 2\pi x=1\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,\cos 2\pi x=1 \text{ şi } \sin 2\pi x=0\}=\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Avem $f(\mathbb{R})=H$. Conform primei teoreme de izomorfism rezultă că $\mathbb{R}/_{Ker\, f}\simeq f(\mathbb{R})$ adică $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}\simeq H$.

c) Aplicaţia $g:\mathbb{C}^*\to\mathbb{R}_+^*,\ g(z)=|\,z\,|$ este omomorfism surjectiv al lui $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ în $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$. Într-adevăr

$$g\left(z_1.z_2\right)=|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=g\left(z_1\right)\cdot g\left(z_2\right),(\forall)\,x_1,x_2\in\mathbb{C}^*,$$

iar

$$Ker\, g=\{z\in\mathbb{C}^*\mid g(z)=1\}=\{z\in\mathbb{C}^*\mid |\,z\,|=1\}=H.$$

Se aplică prima teoremă de izomorfism şi se obţine $\mathbb{C}^*/H\simeq\mathbb{R}_+^*$.

Aplicaţia $g':\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R},\ g'(x)=\ln x$ este un izomorfism al lui $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ pe $(\mathbb{R},+)$.

d) Aplicaţia $h:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*,\ h(z)=\dfrac{z}{|\,z\,|}$ este un endomorfism al lui $(\mathbb{C}^*,\cdot),\ h(\mathbb{C}^*)=H$.

$$Ker\, h=\{z\in\mathbb{C}^*\mid h(z)=1\}=\left\{z\in\mathbb{C}^*\ \middle|\ \frac{z}{|\,z|}=1\right\}=\{z\in\mathbb{C}^*\,|\,z=|\,z|\}=\mathbb{R}_+^*.$$

Aplicând prima teoremă de izomorfism rezultă $\mathbb{C}^*/_{\mathbf{R}_+^*}\simeq H$.

3.2.15 a) Presupunem că există un izomorfism $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$. Atunci $(\exists)\,x,y\in\mathbb{Q}^*$ astfel încât $f(x)=1$ şi $f(y)=\sqrt{3}$. Dacă $m,n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $mx=ny$ avem $f(mx)=f(ny)$ de unde conform rezultatului din Problema 3.2.10 avem $mf(x)=nf(y)$ de unde $m=n\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{3}=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$. Fals!

b) Presupunem că există un izomorfism $f:\mathbb{Q}^*\to\mathbb{R}^*$. Atunci există $y\in R^*$ astfel ca $y^3=f(5)$. Deoarece f este surjectivă, există $x\in\mathbb{Q}^*$ astfel încât $f(x)=y$. Deoarece f este omomorfism avem $y^3=f(x^3)$ de unde $f(x^3)=f(5)$. Conform injectivităţii lui f de aici avem $x^3=5\Rightarrow\sqrt[3]{5}\in\mathbb{Q}$. Fals!

3.2.16 Fie $(G,\cdot)$ un grup de ordin p şi $x\in G$, $x\neq e$ unde $e-$elemetul neutru al lui G. Din teorema lui Lagrange rezultă că ord$x=p\Rightarrow\langle x\rangle=G$.

3.2.17 Dacă $G=\{e\}$ este o mulţime cu un singur element atunci pe G se poate defini o singură operaţie binară

$*$	e
e	e

şi G în raport cu această operaţie este grup. Abstracţie făcând de un izomorfism, există un singur grup de ordinul 1. Dacă G este un grup de ordinul 2, 3 sau 5 rezultă conform problemei anterioare că este ciclic şi deci izomorf cu $(\mathbb{Z}_2,+)$, $(\mathbb{Z}_3,+)$ sau $(\mathbb{Z}_5,+)$.

Fie un grup G de ordinul 4. Dacă G este ciclic atunci este izomorf cu $(\mathbb{Z}_4,+)$. Presupunem că există un grup de ordin 4 neciclic. Fie $G=\{e,a,b,c\}$, e elementul său neutru şi grupul $(G,\cdot)$ neciclic. Din ipoteza că G nu este ciclic urmează că nici un element din G nu are ordinul 4. Întrucât e este singurul element de ordinul 1 şi ordinul unui element divide ordinul grupului rezultă că ord a =ord$b$ =ord $c=2\Leftrightarrow a^2=b^2=c^2=2$. În tabela de operaţie a lui $(G,\cdot)$ pe fiecare linie şi pe fiecare coloană trebuie să figureze toate elementele lui G o singură dată. Din acest motiv tabela de operaţie poate fi completată într-un mod unic

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Astfel s-a demonstrat că există cel mult un grup de ordin 4 neciclic.

Considerăm următoarele transformări ale punctelor planului $x0y$: σ_{1-} aplicaţia identică, σ_2-simetria în raport cu axa $0y$, σ_3-simetria în raport cu axa $0x$, σ_4-simetria în raport cu originea 0 a axelor de coordonate. Considerând mulţimea $K=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}$ în raport compunerea transformărilor obţinem următoarea tablă de operaţie

$\circ$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
σ_2	σ_2	σ_1	σ_4	σ_3
σ_3	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2
σ_4	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1

Din acest tabel deducem că mulţimea K în raport cu compunerea transformărilor este un grup comutativ de ordin 4 neciclic; $\mathrm{ord}\,\sigma_2 = \mathrm{ord}\sigma_3 = \mathrm{ord}\,\sigma_4 = 2$ şi $\mathrm{ord}\,\sigma_1 = 1$. Aşadar abstracţie făcând de un izomorfism, există un singur grup de ordin 4 neciclic numit grupul lui Klein.

3.2.18 b) $\mathrm{ord}\ 1 = 1$, $\mathrm{ord}\ (-1) = 2$, $\mathrm{ord}\, i = \mathrm{ord}\,(-i) = \mathrm{ord}\, j = \mathrm{ord}\,(-j) = \mathrm{ord}\, k = \mathrm{ord}\,(-k) = 4$

$$(\text{ex: } ((-1)^2 = 1); i^2 = i \cdot i = -1;\ i^3 = i^2 \cdot i = -i;\ i^4 = i^3 \cdot i = (-1) \cdot i = -i^2 = 1)$$

c) Subgrupurile ciclice ale lui H sunt
$H_1 =< 1 >= \{1\};\ H_2 =< -1 >= \{-1, 1\},\ H_3 =< i >= \{-1, 1, -i, i\} =< -i >$
$H_4 =< j >= \{-1, 1, -j, j\} =< -j >,\ H_5 =< k >= \{-1, 1, -k, k\} =< -k >,\ H_6 = H.$
Din teorema lui Lagrange rezultă că ordinul unui subgrup al lui H poate fi 1, 2, 4, şi 8. Singurul subgrup de ordin 1 este H_1. Întrucât orice grup de ordin 2 este ciclic rezultă că singurul subgrup de ordin 2 este H_2. Grupul H neavând trei elemente de ordinul 2, rezultă că nu are subgrupuri de ordinul 4 neciclice (vezi problema 3.1.17). Deci subgrupurile de ordin 4 sunt H_3, H_4 şi H_5. În concluzie mulţimea subgrupurilor lui H este $\mathcal{S}(H) = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H\}$.

c) Subgrupurile H_1 şi H sunt normale deoarece subgrupurile triviale ale oricărui grup sunt normale. Elementele H_2 comută cu toate elementele lui H ($H_2 = Z(H)$) rezultă că H_2 este normal ($H_2 \trianglelefteq H$). Conform Teoremei lui Lagrange avem

$$|H : H_3| = \frac{|H|}{|H_3|} = \frac{8}{4} = 2\,,\ |H : H_4| = 2\,,\ |H : H_5| = 2.$$

Deoarece orice subgrup de indice doi este normal rezultă că H_3, H_4, H_5 sunt subgrupuri normale.

Observaţie. Un grup necomutativ care are toate subgrupurile normale se numeşte **grup hamiltonian**. În concluzie, $(H, \cdot)$ este un grup hamiltonian.

3.2.19 Din problema 3.1.18, subgrupurile lui H sunt toate subgrupuri normale, deci clasele la stânga coincid cu clasele la dreapta în raport cu fiecare subgrup. Prin urmare, vom descrie chiar grupurile cât ale lui H.
$H_1 =< 1 >= \{1\};\ H/_{H_1} = \{xH_1 | x \in H\} = \{\{1\}, \{-1\}, \{i\}, \{-i\}, \{j\}, \{-j\}, \{k\}, \{-k\}\};$
$H_2 =< -1 >= \{1, -1\};\ H/_{H_2} = \{xH_2 | x \in H\} = \{H_2, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}\};$
$H_3 =< i >= \{-1, 1, -i, i\};\ H/_{H_3} = \{xH_3 | x \in H\} = \{H_3, \{-j, j, k, -k\}\};$
$H_4 =< j >= \{-1, 1, -j, j\};\ H/_{H_4} = \{xH_4 | x \in H\} = \{H_4, \{-i, i, k, -k\}\};$
$H_5 =< k >= \{-1, 1, -k, k\};\ H/_{H_5} = \{xH_5 | x \in H\} =)H_5, \{i, -i, j, -j\}\}.$
Subgrupul generat de $\{i, j\}$ conţinându-l şi pe k va include pe H_3, H_4, H_5, deci coincide cu H.

$$H/_{\{i,j\}} = H/_H = \{H\}.$$

3.2.20 Fie $H = \{2^z | z \in \mathbb{Z}\}, 2^0 = 1 \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$. Dacă $a = 2^{z_1}, b = 2^{z_2} \in H$ atunci $a \cdot b = 2^{z_1} \cdot 2^{z_2} = 2^{z_1+z_2} \in H$. Dacă $a = 2^z$ şi $a' = 2^{-z}$ atunci $a \cdot a' = 2^z \cdot 2^{-z} = 2^{z-z} = 1 \Rightarrow a' = 2^{-z} = a^{-1} \in H$. Prin urmare H este subgrup al grupului comutativ $G = \{2^x \cdot 3^y \cdot 5^z | x, y, z \in \mathbb{Z}\}$, $G/_H = \{xH \mid x \in G\}$. Dacă $a, b \in H$ atunci ele se află în aceeaşi clasă dacă şi numai dacă $a^{-1} \cdot b \in H$.
Fie $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}; b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$. Avem $a^{-1} \cdot b = 2^{x_2-x_1} \cdot 3^{y_2-y_1} \cdot 5^{z_2-z_1}$.

$$a^{-1} \cdot b \in H \Leftrightarrow y_2 - y_1 = 0, z_2 - z_1 = 0 \Leftrightarrow y_2 = y_1 \text{ şi} z_2 = z_1.$$

În concluzie, $G/_H = \{\{2^x \cdot 3^y \cdot 5^z |\ x, y, z \in \mathbb{Z}\} \mid (y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$.

3.2.21 a) $NH = \{n{\cdot}h \mid n \in N, h \in H\}; HN = \{h{\cdot}n \mid h \in H, n \in N\}$. Fie $x \in NH$, adică $x = n{\cdot}h$, $n \in N$, $h \in H$. Deoarece N este subgrup normal, rezultă că $N \cdot h = h \cdot N$. Rezultă că $x = n \cdot h = h \cdot n', n' \in N$ adică $x \in H \cdot N$. Aşadar $N \cdot H \subset H \cdot N$. Analog se arată că $H \cdot N \subset N \cdot H$, adică $HN = NH$.

Să arătăm acum că $NH \leq G$. Într-adevăr, fie $x, y \in N{\cdot}H \Rightarrow x = n{\cdot}h, y = n'{\cdot}h'; n, n' \in N; h, h' \in H$. Atunci, $x \cdot y'^{-1} = (n \cdot h)(n' \cdot h')^{-1} = (n \cdot h)(h'^{-1} \cdot n'^{-1}) = n \cdot h'' \cdot n'^{-1}$, unde $h'' = h \cdot h'^{-1} \in H$. Cum N este subgrup normal, atunci $N \cdot h'' = h'' \cdot N$ şi deci $n \cdot h'' = h'' \cdot n''$, $n'' \in N$. Rezultă că $x \cdot y^{-1} = h'' \cdot n'' \cdot n'^{-1} = h'' \cdot n''', n''' = n'' \cdot n'^{-1} \in N$. În concluzie x$\cdot y^{-1} \in HN = NH$.

b) Cum $N \trianglelefteq G$ iar $N \subset NH$ $(x \in N, x = x \cdot e \in NH)$ rezultă că $N \trianglelefteq N \cdot H$ şi deci putem construi grupul factor $NH/_N$. Definim aplicaţia $f : H \to NH/_N\, ; f(x) = xN\, (x = e \cdot x \in NH)$. Arătăm că f este omomorfism de grupuri. Într-adevăr, $f(xy) = (xy)N = xN \cdot yN = f(x) \cdot f(y)$. Conform primei teoreme de izomorfism avem că $H/_{Ker\, f} \simeq \mathrm{Im} f$. Să calculăm $Ker\, f$ şi $\mathrm{Im} f$. $Ker\ f = \{x \in H \mid f(x) = N\}$. Vom arăta că $Ker\, f = N \cap H$ şi astfel s-a arătat punctul b).

Fie $x \in Ker\ f \Rightarrow f(x) = N$ sau $xN = N \Rightarrow x \in N$. Deoarece $x \in H$ şi $x \in N \Rightarrow x \in H \cap N$ adică $Kerf \subset H \cap N$.

Reciproc, fie $x \in N \cap H \Rightarrow x \in N$ şi $x \in H$. Cum $x \in N \Rightarrow xN = N \Leftrightarrow f(x) = xN = N \Rightarrow x \in Ker\ f$. Rezultă că $N \cap H \subset Kerf$.

Să arătăm acum că f este omomorfism surjectiv iar în cazul acesta $\mathrm{Im} f = N \cdot H/_N$.

Fie $zN \in NH/_N \Rightarrow zN = nh \cdot N, n \in N, h \in H$. Dar $n \cdot h \cdot N = h \cdot N$ deoarece $(nh) \cdot h^{-1} = n \in H$ şi deci $zN = hN = f(h)$. Deci f este surjectivă. În concluzie $H/_{N \cap H} \simeq NH/_N$.

3.2.22 Definim aplicaţia $\varphi : G/_H \to G/_N$ prin $\varphi(xH) = xN$. Funcţia φ este bine definită nedepinzând de alegerea reprezentanţilor. Într-adevăr, dacă $xH = yH \Rightarrow x^{-1}y \in H$. Dar $H \subset N$ şi deci rezultă că $x^{-1}y \in N$, adică $xN = yN$ şi în concluzie $\varphi(xH) = \varphi(yH)$. Funcţia φ este morfism de grupuri deoarece $\varphi(xH \cdot yH) = \varphi(xyH) = xyN = xN \cdot yN = \varphi(xH) \cdot \varphi(yH)$.

Din definirea aplicaţiei φ avem că φ este omomorfism surjectiv şi deci $\mathrm{Im}\varphi = G/_N$. Rezultă, conform primei teoreme de izomorfism, că $(G/H)\,/_{Ker\ f} \simeq G/_N$.

Să arătăm că $Ker\varphi = N/_H$ ceea ce ar arăta că $N/_H \trianglelefteq G/_H$. $Ker\varphi = \{xH \in G/_H \mid \varphi(xH) = N\}$. Dacă $xH \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(xH) = N \Rightarrow xN = N \Rightarrow x \in N \Rightarrow x \cdot H \in N/_H$, adică $Ker\varphi \subset N/_H$.

Reciproc, dacă $xH \in N/_H \Rightarrow x \in N \Rightarrow \varphi(xN) = xN = N \Rightarrow xH \in Ker\varphi$ adică $Ker\varphi \subset Kerf$.

În concluzie $(G/_H)\,/(N/_H) \simeq G/_N$.

3.2.23 a) Fie $A, B \in GL_n(K) \Rightarrow \det A \neq 0, \det B \neq 0 \Rightarrow \det(A{\cdot}B) = \det A{\cdot}\det B \neq 0 \Rightarrow A{\cdot}B \in GL_n(K)$. Din asociativitatea înmulţirii matricilor rezultă că operaţia indusă de aceasta în $GL_n(K)$ este asociativă.

Dacă $A \in GL_n(K) \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow (\exists)A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

$\det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n = \det(A^{-1} \cdot A) \Leftrightarrow \det A \cdot \det(A^{-1}) = \det(A^{-1}) \cdot \det A = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow A^{-1} \in GL_n(K)$.

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

În concluzie, $(GL_n(K), \cdot)$ este grup.

b) Aplicaţia $\varphi : K^* \to GL_n(K)\, ;\ \varphi(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix} = xI_n$ este un omomorfism injectiv.

Într-adevăr, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), (\forall)x, y \in K^*$ şi dacă $\varphi(x) = \varphi(y)$ rezultă

$$\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & y \end{pmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow K^* \simeq \varphi(K^*) \subset GL_n(K).$$

c) Aplicaţia: $\psi : \mathbb{C}^* \to GL_2(\mathbb{R}),\ \psi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ este un omomorfism injectiv.

Într-adevăr, $\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi(z_1) \cdot \psi(z_2)$, $(\forall)\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ şi dacă $\psi(z_1) = \psi(z_2) \Rightarrow \psi(a+bi) = \psi(c+di) \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array} \right. \Rightarrow a + bi = c + di \Rightarrow z_1 = z_2.$$

În concluzie rezultă că $\mathbb{C}^* \simeq \psi(\mathbb{C}^*) \subset GL_2(\mathbb{R})$.

d) $\det I_n = 1 \Rightarrow I_n \in SL_n(K) \Rightarrow SL_n(K) \neq \emptyset$.

Dacă $A, B \in SL_n(K) \Rightarrow \det A = \det B = 1 \Rightarrow \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow A \cdot B \in SL_n(K)$.

Dacă $A \in SL_n(K)$ atunci $\det A = 1$ deci $(\exists) A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $A \cdot A^{-1} = I_n$ de unde $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$. Prin urmare $\det(A^{-1}) = 1$ adică $A^{-1} \in SL_n(K)$.

Am demonstrat astfel că $SL_n(K)$ este un subgrup al lui $(GL_n(K), \cdot)$. Pentru orice $A \in SL_n(K)$ şi orice $X \in GL_n(K)$ avem

$\det(X^{-1} \cdot A \cdot X) = \det(X^{-1}) \cdot \det A \cdot \det X = \det(X^{-1}) \cdot \det X = \det(X^{-1} \cdot X) = \det I_n = 1 \Rightarrow X^{-1} \cdot A \cdot X \in SL_n(K) \Rightarrow SL_n(K) \trianglelefteq GL_n(K)$.

e) **Observaţie.** Acest fapt se poate dovedi şi arătând că aplicaţia $g : GL_n(K) \to K^*, g(A) = \det A$ este un omomorfism surjectiv al lui $(GL_n(K), \cdot)$ pe $(K^*, \cdot)$ şi $Ker g = SL_n(K)$. Conform primei teoreme de izomorfism $GL_n(K)/_{Ker\, g} \simeq K^*$, adică $GL_n(K)/_{SL_n(K)} \simeq K^*$.

3.2.24

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \text{ord } A = 2$$
$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Prin inducţie matematică se arată că $B^n = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $B^n = I_2 \Leftrightarrow n = 0$ adică $\text{ord} B = \infty$.

$$C^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$C^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \text{ord} C = 4$$

$$< A >= \{I_2, A\}; < B >= \{B^k \mid k \in \mathbb{Z}\}; < C >= \{I, C, C^2, C^3\}.$$

3.2.25 Fie $M = [m, n]$ şi $d = (m, n)$. Dacă $m = m' \cdot d$, $n = n' \cdot d$ $(m', n' \in \mathbb{N}^*)$, din $M \cdot d = m \cdot n$ rezultă că $M = m' \cdot n' \cdot d = m' \cdot n = m \cdot n'$.

a) Din $xy = yx$ rezultă că $(x \cdot y)^M = x^M \cdot y^M = x^{m \cdot n'} \cdot y^{m' \cdot n} = (x^m)^{n'} \cdot (y^n)^{m'} = e \cdot e = e$. De aici rezultă că ord$(xy)$ este finit şi ord$(xy) \mid M$.

b) Dacă $b =$ord(xy) avem $(xy)^b = x^b \cdot y^b = e$. Rezultă că $x^b = y^{-b}$. Dar, $x^b \in < x >$ şi $y^{-b} \in < y >$. Din faptul că $< x > \cap < y >= \{e\}$ rezultă că $x^b = y^{-b} = e$. Cum ord$x = m$ şi ord$y = n$ avem $m|b$ şi $n|b$. Rezultă că $[m, n] \,|\, b$ adică $M \mid b$. Ţinând seama de punctul a) rezultă că avem şi $b \mid M$, adică $M = b$.

c) Din teorema lui Lagrange avem $|< x > \cap < y >|$ divide $|< x >| =$ord$x = m$ şi deasemenea divide şi pe $|< y >| =$ord$y = n$. Deoarece $(m, n) = 1$ rezultă că $|< x > \cap < y >| = 1$ şi deci $< x > \cap < y >= \{e\}$. În concluzie ord$(x \cdot y) = [m, n] = m \cdot n$. Avem $< xy >\subseteq< x, y >$. Deoarece $(m, n) = 1$ există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $um + vn = 1$. De aici $x = x^{um+vn} = (x^m)^n \cdot x^{vn} = e \cdot x^{vn} = x^{vn} \cdot (y^n)^v = (xy)^{vn}$. Analog $y = (xy)^{um}$. Deci $x, y \in< xy >$ ceea ce implică $< x, y >\subseteq< x \cdot y >$.

3.2.26 1) Se verifică asociativitatea legii de compoziţie. Elementul neutru este $(0, 0, 1) \in G$. Dacă $m_3 = 1$, atunci $(m_1, m_2, m_3) \cdot (x, y, z) = (m_1 + x, m_2 + y, z) = (0, 0, 1)$. Adică vom avea

$$\begin{cases} m_1 + x = 0 \\ m_2 + y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -m_1 \\ y = -m_2 \\ z = 1 \end{cases} ; \ (x, y, z) = (-m_1, -m_2, 1) \in G.$$

Simetricul lui $(m_1, m_2, 1)$ este $(-m_1, -m_2, 1)$. Analog, simetricul lui $(m_1, m_2, -1)$ este $(-m_2, -m_1, -1)$.

2) Avem $(1,0,1)\cdot(0,1,1)=(1,1,1)=(0,1,1)\cdot(1,0,1)$. Deci

$$H=<(1,0,1),(0,1,1>=<(1,0,1)>\cdot<(0,1,1)>.$$

Avem
$<(1,0,1)>=\{(1,0,1)^k \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{(0,0,1),(1,0,1),(2,0,1),(3,0,1),\ldots\}=\mathbb{Z}\times\{0\}\times\{1\}$.
$<(0,1,1)>=\{(0,1,1)^k \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{0\}\times\mathbb{Z}\times\{1\}$.
Rezultă $H=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\{1\}$ ceea ce ne arată că H_1 este comutativ, deci $H_1\trianglelefteq G$.
3) $H_2\le H_1$,H$_1$ comutativ ne conduce la faptul că $H_2\trianglelefteq H_1$. Întrucât $H_2=\mathbb{Z}\times\{0\}\times\{1\}$ şi

$$(1,0,-1)^{-1}\cdot(1,0,1)\cdot(1,0,-1)=(0,-1,-1)\cdot(1,0,1)\cdot(1,0,-1)=(0,0,-1)\cdot(1,0,-1)=(0,1,-1)\notin H_2,$$

rezultă că H_2 nu este normal în G.

3.2.27 a) Fie $n\mathbb{Z}\subseteq m\mathbb{Z}\Rightarrow n\in m\mathbb{Z}\Rightarrow(\exists)k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $n=mk\Rightarrow m|n$.

Reciproc, dacă $m|n$ şi $y\in n\mathbb{Z}\Rightarrow(\exists)k_1\in\mathbb{Z}$ astfel încât $n=m\cdot k_1$ şi $(\exists)k_2\in\in$ astfel încât $y=nk_2$. Avem $y=(mk_1)k_2=m\cdot(k_1\cdot k_2)=mk$, unde $k=k_1\cdot k_2\in\mathbb{Z}$.

În concluzie, $y\in m\mathbb{Z}$ şi deci $n\mathbb{Z}\subseteq m\mathbb{Z}$.

b) $m\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}\le\mathbb{Z}$. Pe $M\in\mathbb{Z}$ astfel încât $m\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}=M\mathbb{Z}$. Vom arăta că $M=[m,n]$, adică M este cel mai mic multiplu comun al lui m şi n. Din $M\mathbb{Z}\subseteq m\mathbb{Z}\Rightarrow m|M$ şi $M\mathbb{Z}\subseteq n\mathbb{Z}\Rightarrow n|M$, rezultă că M este multiplu comun al lui m şi n. Deci $[m,n]|M$ şi conform punctului a) avem $M\mathbb{Z}\subseteq[m,n]\mathbb{Z}$.

Dacă M' este un alt multiplu comun al lui m şi n, atunci avem

$$\left.\begin{array}{l} m|M'\Rightarrow M'\mathbb{Z}\subseteq m\mathbb{Z}\\ n|M'\Rightarrow M'\mathbb{Z}\subseteq n\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow M'\mathbb{Z}\subseteq m\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}\Rightarrow M'\mathbb{Z}\subseteq M\mathbb{Z}\Rightarrow M|M',$$

adică M este cel mai mic multiplu comun al lui m şi n.
În concluzie $m\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}=[m,n]\,\mathbb{Z}$.

c) $(\mathbb{Z},+)$ fiind grup abelian, $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}\Rightarrow m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}\le\mathbb{Z}$. Fie $d\in\mathbb{Z}$ astfel încât $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}$. Vom arăta că $d=(m,n)$, adică d este cel mai mare divizor comun al lui m şi n.

$$m\mathbb{Z}\subseteq<m\mathbb{Z}\cup n\mathbb{Z}>\text{ şi }\ n\mathbb{Z}\subseteq<n\mathbb{Z}\cup m\mathbb{Z}>$$

adică

$$m\mathbb{Z}\subseteq d\mathbb{Z}\ \text{ şi }\ n\mathbb{Z}\subseteq d\mathbb{Z}.$$

Conform punctului a) rezultă că $d\mid m$ şi $d\mid n$, adică d este un divizor comun al lui m şi n.

Dacă d' este un alt divizor comun al lui m şi n atunci

$$\left.\begin{array}{l} d'|m\Rightarrow m\mathbb{Z}\subseteq d'\mathbb{Z}\\ d'|n\Rightarrow n\mathbb{Z}\subseteq d'\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}\subseteq d'\mathbb{Z}\Rightarrow d\mathbb{Z}\subseteq d'\mathbb{Z}\Rightarrow d'|d,$$

adică d este c.m.m.d.c. al lui m şi n, $(m,n)=d$.
În concluzie, $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=<m\mathbb{Z}\cup n\mathbb{Z}>=(m,n)\,\mathbb{Z}$.

Exemplu.

$6\mathbb{Z}\cap 8\mathbb{Z}=[6,8]\mathbb{Z}$ adică $6\mathbb{Z}\cap 8\mathbb{Z}=24\mathbb{Z}$
$6\mathbb{Z}+8\mathbb{Z}=<6\mathbb{Z}\cup 8\mathbb{Z}>=(6,8)\mathbb{Z}$ adică $6\mathbb{Z}+8\mathbb{Z}=2\mathbb{Z}$.

3.2.28

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&3&6&5&1\end{pmatrix}=(1,2,4,6)\text{ în }S_6,$$
$$\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&5&4&3&6\end{pmatrix}=(3,5)\text{ în }S_6,$$
$$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&2&6&4&5\end{pmatrix}=(1,3,2)\circ(4,6,5).$$

3.2.29 a)

$$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\9&12&8&11&6&7&5&3&2&4&10&1\end{pmatrix}=(1,9,2,12)\circ(3,8)\circ(4,11,10)\circ(5,6,7).$$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Cum $\sigma(1) = 2$ atunci $\sigma(1) \neq 1$ şi considerăm transpoziţia $(1,2)$. Facem produsul $\sigma_1 = (1,2) \circ \sigma$. Avem

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cum $\sigma_1(2) = 3$, atunci $\sigma_1(2) \neq 2$ şi considerăm transpoziţia $(2,3)$. Facem produsul

$$\sigma_2 = (2,3) \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cum $\sigma_2(4) = 5$, atunci $\sigma_2(4) \neq 4$ şi considerăm transpoziţia $(4,5)$. Facem produsul

$$\sigma_3 = (4,5) \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cum $\sigma_3(5) = 6$, atunci considerăm transpoziţia $(5,6)$

$$\sigma_4 = (5,6) \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (6,8).$$

Deci

$$\begin{aligned} (6,8) &= (5,6) \circ \sigma_3 = (5,6) \circ (4,5) \circ \sigma_2 \\ &= (5,6) \circ (4,5) \circ (2,3) \circ \sigma_1 \\ &= (5,6) \circ (4,5) \circ (2,3) \circ (1,2) \circ \sigma \end{aligned}$$

de unde obţinem

$$\sigma = (1,2) \circ (2,3) \circ (4,5) \circ (5,6) \circ (6,8)$$

sau

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (1,2,3) \circ (4,5,6,8).$$

Ţinând seama că orice ciclu este un produs de transpoziţii rezultă că

$$\sigma = (1,3) \circ (1,2) \circ (4,8) \circ (4,6) \circ (4,5).$$

3.2.30 Fie ord$\gamma_1 = l(\gamma_1) = m_1$, ord$\gamma_2 = l(\gamma_2) = m_2, \ldots,ord\gamma_k = l(\gamma_k) = m_k$. Ciclurile $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ fiind disjuncte rezultă că pentru $i \neq j$, $< \gamma_i > \cap < \gamma_j >= \{e\}$ unde e este permutarea identică. Ţinând seama de problema 25 rezultă că ordσ =ord$(\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \ldots \circ \gamma_k) = [ord\gamma_1,ord\gamma_2, \ldots,ord\gamma_k] = [m_1, m_2, \ldots, m_k]$.

3.2.31 Descompunem întâi permutarea în cicluri disjuncte:

a) $\sigma = (1,4,7,10) \circ (2,6,3) \circ (5,8,9)$. Ciclul $\gamma_1 = (1,4,7,10)$ are ord$\gamma_1 = l(\gamma_1) = 4$; ciclul $\gamma_2 = (2,6,3)$ are ord$\gamma_2 = l(\gamma_2) = 3$; ciclul $\gamma_3 = (5,8,9)$ are ord$\gamma_3 = l(\gamma_3) = 3$. Ţinând seama de problema 29 rezultă că ord$\sigma = [4,3,3] = 12$.

$$\begin{aligned} &\sigma^{100} = \sigma^{12 \cdot 8 + 4} = (\sigma^{12})^8 \circ \sigma^4 = e \circ \sigma^4 = \sigma^4 \\ &\sigma^4 = (1,4,7,10)^4 \circ (2,6,3)^4 \circ (5,8,9)^4 = e \circ (2,6,3) \circ (5,8,9) \\ &\sigma^{100} = (2,6,3) \circ (5,8,9) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 2 & 4 & 8 & 3 & 7 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) $\sigma = (1,3,6) \circ (2,4,5,9,10) \circ (7,12)$; ord$\sigma = [3,5,2] = 30 \Leftrightarrow \sigma^{30} = e$; $\sigma^{100} = \sigma^{3 \cdot 30 + 10} = (\sigma^{30})^3 \circ \sigma^{10} = \sigma^{10}$; $\sigma^{10} = (1,3,6)^{10} \circ (2,4,5,9,10)^{10} \circ (7,12) = (1,3,6)$.

În concluzie,

$$\sigma^{100} = (1,3,6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

3.2.32 Dacă $\gamma = (i_1, i_2, \ldots, i_m) \in S_n$, atunci $\gamma^k(i_j) = \begin{cases} i_{j+k}, \text{ dacă } j+k \leq m \\ i_{j+k-m}, \text{ dacă } j+k > m \end{cases}$.

$$\sigma_1^3 = (1,2,3)^3 \circ (4,5,6,8)^3 = (4,5,6,8)^3 = (4,8,6,5)$$

$$\sigma_2^2 = (3,4)^2 \circ (5,2,6,1,8)^2 = (5,2,6,1,8)^2 = (5,6,8,2,1)$$

$$\sigma_2^2 \circ \sigma_1 = ((5,6,8,2,1) \circ (1,2,3) \circ (4,5,6,8) = (2,3,5,8,4,6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_5 &= (1,3,4) \circ (2,3,5,7) \circ (1,8,4,6) \circ (8,2,1,4,3) \circ (1,2) \circ (1,5) \circ (8,7,4,3,1,2) \circ (5,6) = \\ &= (1,8) \circ (2,4,6,3,5,7) \circ (8,2,1,4,3) \circ (1,5,2) \circ (8,7,4,3,1,2) \circ (5,6) = \\ &= (1,6,8,2,4) \circ (3,7,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3^4 \circ \sigma_4^2 &= [(1,3,4) \circ (2,3,5,7) \circ (1,8,4,6)]^4 \circ [(8,2,1,4,3) \circ (1,2) \circ (1,5)]^2 = \\ &= [(1,8) \circ (2,4,6,3,5,7)]^4 \circ [(8,2,1,4,3) \circ (1,5,2)]^2 = \\ &= (1,8)^4 \circ (2,4,6,3,5,7)^4 \circ [(1,5) \circ (2,4,3,8)]^2 = \\ &= (2,4,6,3,5,7)^4 \circ (1,5)^2 \circ (2,4,3,8)^2 = (2,5,6) \circ (4,7,3) \circ (2,3) \circ (4,8) = (2,4,8,7,3,5,6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_5 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3 &= [(8,7,4,3,1,2) \circ (5,6)] \circ [(8,2,1,4,3) \circ (1,2) \circ (1,5)] \circ [(1,3,4) \circ (2,3,5,7) \circ (1,8,4,6)] = \\ &= [(8,7,4,3,1,2) \circ (5,6)] \circ [(8,2,1,4,3) \circ (1,5,2)] \circ [(1,8) \circ (2,4,6,3,5,7))] = \\ &= (8,7,4,3,1,2) \circ ((5,6) \circ (1,5) \circ (2,4,3,8) \circ (1,8) \circ (2,4,6,3,5,7) = (1,8,6,7,3,2) \circ (4,5). \end{aligned}$$

3.2.33 Dacă $i \in \{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_k)\}$, atunci

$$(\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1})(i) = (\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1})(\sigma(i_m)) = (\sigma \circ \gamma)(i_m) = \sigma(\gamma(i_m)) = \sigma(i_{m+1})$$

pentru $m \in \{1,2,3,\ldots,k-1\}$. Dacă $i = i_k$ avem $(\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1})(i_k) = \sigma(\gamma(i_k)) = \sigma(i_1)$. Dacă $i \notin \{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_k)\}$ adică $\sigma^{-1}(i) \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. atunci $\gamma(\sigma^{-1}(i)) = \sigma^{-1}(i) \Rightarrow (\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1})(i) = i$.

b) Folosind punctul a) avem

$$\begin{aligned} \sigma_1 \circ \sigma_4 \circ \sigma_1^{-1} &= \sigma_1 \circ [(8,2,1,4,3) \circ (1,2) \circ (1,5)] \circ \sigma_1^{-1} = \\ &= [\sigma_1 \circ (8,2,1,4,3) \circ \sigma_1^{-1}] \circ [\sigma_1 \circ (1,2) \circ \sigma_1^{-1}] \circ [\sigma_1 \circ (1,5) \circ \sigma_1^{-1}] = \\ &= (\sigma_1(8), \sigma_1(2), \sigma_1(1), \sigma_1(4), \sigma_1(3)) \circ (\sigma_1(1), \sigma_1(2)) \circ (\sigma_1(1), \sigma_1(5)) = \\ &= (4,3,2,5,1) \circ (2,3) \circ (2,6). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_5^{-2} \circ \sigma_3 \circ \sigma_5^2 = (\sigma_5^{-2}) \circ \sigma_3 \circ (\sigma_5^{-2})^{-1} \\ &\sigma_5^{-2} = (\sigma_5^2)^{-1} \\ &\sigma_5^2 = [(8,7,4,3,1,2) \circ (5,6)]^2 = (8,7,4,3,1,2)^2 = (8,4,1) \circ (7,3,2) \\ &\sigma_5^{-2} = [(8,4,1) \circ (7,3,2)]^{-1} = (8,4,1)^{-1} \circ (7,3,2)^{-1} = (1,4,8) \circ (2,3,7) \end{aligned}$$

$$\sigma_5^{-2} \circ \sigma_3 \circ \sigma_5^2 = (\sigma_5^{-2}(1), \sigma_5^{-2}(3), \sigma_5^{-2}(4)) \circ (\sigma_5^{-2}(2), \sigma_5^{-2}(3), \sigma_5^{-2}(5), \sigma_5^{-2}(7)) \circ$$
$$\circ (\sigma_5^{-2}(1), \sigma_5^{-2}(8), \sigma_5^{-2}(4), \sigma_5^{-2}(6)) = (4,7,8) \circ (3,7,5,2) \circ (4,1,8,6)$$

Analog, pentru $\sigma_2^{-5} \circ \sigma_4 \circ \sigma_2^5 = \sigma_5^{-2} \circ \sigma_4 \circ (\sigma_2^{-5})^{-1}$

$$\sigma_2^5 = [(3,4) \circ (5,2,6,1,8)]^5 = (3,4)^5 \circ (5,2,6,1,8)^5 = (3,4); \quad \sigma_2^{-5} = (4,3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^{-5} \circ \sigma_4 \circ \sigma_2^5 &= (\sigma_2^{-5}(8), \sigma_2^{-5}(2), \sigma_2^{-5}(1), \sigma_2^{-5}(4), \sigma_2^{-5}(3)) \circ (\sigma_2^{-5}(1), \sigma_2^{-5}(2)) \circ (\sigma_2^{-5}(1), \sigma_2^{-5}(5)) = \\ &= (8,2,1,3,4) \circ (1,2) \circ (1,5). \end{aligned}$$

c) Avem

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1} = \sigma_2,$$
$$\sigma_1 \circ \sigma_3 = \sigma_3 \circ \sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_1^{-1} = \sigma_3.$$

Trebuiesc verificate ultimele egalităţi

$$\begin{aligned} \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1} &= (\sigma_1(1), \sigma_1(4), \sigma_1(7)) \circ (\sigma_1(2), \sigma_1(5), \sigma_1(8)) \circ (\sigma_1(3), \sigma_1(6), \sigma_1(9)) = \\ &= (2,5,8) \circ (3,6,9) \circ (1,4,7) = (1,4,7) \circ (2,5,8) \circ (3,6,9\_ = \sigma_2 \end{aligned}$$

(Fiind cicluri disjuncte ele comută două câte două).

$$\begin{aligned} \sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_1^{-1} &= (\sigma_1(4), \sigma_1(5), \sigma_1(6)) \circ (\sigma_1(7), \sigma_1(8), \sigma_1(9)) = \\ (5,6,4) \circ (8,9,7) &= (4,5,6) \circ (7,8,9) = \sigma_3. \end{aligned}$$

3.2.34 a) Subgrupul simetric de ordinul 3 este

$$S_3 = \left\{ e;\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2);\ \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)\ ; \right.$$
$$\left. \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3); \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3);\ \ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2) \right\}$$

ord$\sigma_1 = l(\sigma_1) = 2$; ord$\sigma_2 = l(\sigma_2) = 2$; ord$\sigma_3 = l(\sigma_3) = 2$; ord$e = 1$, ord$\sigma_4 = l(\sigma_4) = 3$; ord$\sigma_5 = l(\sigma_5) = 3$.

b) S_3 are subgrupurile improprii: $H_1 = \{e\}, H_2 = S_3$. Conform teoremei lui Lagrange ordinul unui subgrup divide ordinul grupului. Rezultă că S_3 poate avea subgrupurile proprii de ordinul 2 sau 3 care sunt ciclice.

$H_3 =< \sigma_1 >= \{e, \sigma_1\}$
$H_4 =< \sigma_2 >= \{e, \sigma_2\}$
$H_5 =< \sigma_3 >= \{e, \sigma_3\}$
$H_6 =< \sigma_4 >= \{e, \sigma_4, \sigma_4^2\} = \{e, \sigma_4, \sigma_5\} =< \sigma_5 >= A_3$ (permutările pare).
H_1, S_3 sunt subgrupuri normale.

$$|S_3 : H_6| = \frac{|S_3|}{|H_6|} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow H_6 \trianglelefteq S_3$$

Vertificăm dacă $\sigma_2 \circ H_3 = H_3 \circ \sigma_2$ avem

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_2 \circ H_3 = \{\sigma_2, \sigma_2 \circ \sigma_1\} = \{\sigma_1, \sigma_4\} \\ \sigma_2 \circ \sigma_1 = (1,3) \circ (1,2) = (1,2,3) \\ \sigma_1 \circ \sigma_2 = (1,2) \circ (1,3) = (1,3,2) = \sigma_5 \\ H_3 \circ \sigma_2 = \{\sigma_2, \sigma_1 \circ \sigma_2\} = \{\sigma_2, \sigma_5\} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_2 \circ H_3 \neq H_3 \circ \sigma_2 \Rightarrow H_3 \text{ nu este subgrup normal în } S_3.$$

Analog se arată că nici H_4 şi H_5 nu sunt subgrupuri normale în S_3.

d) $S_3/_{H_1} = \{\sigma \circ H_1 \,|\, \sigma \in S_3\} = \{\{e\}.\{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}, \{\sigma_3\}, \{\sigma_4\}, \{\sigma_5\}\}$

$S_3/_{H_2} = \{\sigma \circ S_3 \,|\, \sigma \in S_3\} = \{S_3\}$

$S_3/_{H_6} = \{\sigma \circ H_6 \,|\, \sigma \in S_3\} = \{H_6,\ (1,2)\circ < (1,2,3) >\} = \{\{e, (1,2,3), (1,3,2)\}, \{(1,2), (2,3), (1,3)\}\} = \{A_3, \sigma_2 \circ A_3\}$

iar operaţiile sunt definite astfel:

$\circ$	$\{e\}$	(σ_1)	$\{\sigma_2\}$	$\{\sigma_3\}$	$\{\sigma_4\}$	$\{\sigma_5\}$
$\{e\}$	$\{e\}$	(σ_1)	$\{\sigma_2\}$	$\{\sigma_3\}$	$\{\sigma_4\}$	$\{\sigma_5\}$
(σ_1)	$\{\sigma_1\}$	$\{e\}$	$\{\sigma_5\}$	$\{\sigma_4\}$	$\{\sigma_3\}$	$\{\sigma_2\}$
$\{\sigma_2\}$	$\{\sigma_2\}$	$\{\sigma_4\}$	$\{e\}$	$\{\sigma_5\}$	(σ_1)	$\{\sigma_3\}$
$\{\sigma_3\}$	$\{\sigma_3\}$	$\{\sigma_5\}$	$\{\sigma_4\}$	$\{e\}$	$\{\sigma_2\}$	(σ_1)
$\{\sigma_4\}$	$\{\sigma_4\}$	$\{\sigma_2\}$	$\{\sigma_3\}$	(σ_1)	$\{\sigma_5\}$	$\{e\}$
$\{\sigma_5\}$	$\{\sigma_5\}$	$\{\sigma_3\}$	(σ_1)	$\{\sigma_2\}$	$\{e\}$	$\{\sigma_4\}$

$\circ$	S_3
S_3	S_3

$\circ$	A_3	$\sigma_2 \circ A_3$
A_3	A_3	$\sigma_2 \circ A_3$
$\sigma_2 \circ A_3$	$\sigma_2 \circ A_3$	A_3

Deci grupul $S_3/_{H_1} \simeq S_3$; $S_3/_{A_3} \simeq \mathbb{Z}_2$.

3.2.35 Fie $\sigma_1 = (1,2)\circ(3,4)$; $\sigma_2 = (1,3)\circ(2,4)$ $\sigma_1\circ\sigma_2 = (1,2)\circ(3,4)\circ(1,3)\circ(2,4) = (1,4)\circ(2,3) = \sigma_3$
$\sigma_2\circ\sigma_1 = (1,3)\circ(2,4)\circ(1,2)\circ(3,4) = (1,4)\circ(2,3) = \sigma_3$
$\text{ord}\sigma_1 = [2,2] = 2 \Rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = e$
$\text{ord}\sigma_2 = [2,2] = 2$
$\text{ord}\sigma_3 = [2,2] = 2$
$H =< (1,2)\circ(3,4),(1,3)\circ(2,4) >=< (1,2)\circ(3,4) > \circ < (1,3)\circ(2,4) >$
$H = \{e,(1,2)\circ(3,4),(1,3)\circ(2,4),(1,4)\circ(2,3)\}$
Completând tabla de operaţie avem

$\circ$	e	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	e	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_3	e	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	e

$\sigma_1\circ\sigma_3 = (1,2)\circ(3,4)\circ(1,4)\circ(2,3) = (1,3)\circ(2,4) = \sigma_2$
$\sigma_2\circ\sigma_3 = (1,3)\circ(2,4)\circ(1,4)\circ(2,3) = (1,2)\circ(3,4) = \sigma_1$
Constatăm că este la fel structurată cu cea a grupului lui Klein.

Inele

3.2.36 a) Verificăm axiomele inelului comutativ cu element unitate: i) $(\mathbb{Z},\oplus)$ este un grup abelian
Într-adevăr, operaţia "$\oplus$" este asociativă, adică $(\forall)x,y,z\in\mathbb{Z}$ avem

$$(x\oplus y)\oplus z = (x+y+a)\oplus z = x+y+a+z+a = x+y+z+2a,$$
$$x\oplus(y\oplus z) = x\oplus(y+z+a) = x+y+z+a+a = x+y+z+2a,$$

deci $(x\oplus y)\oplus z = x\oplus(y\oplus z)$.
Operaţia "$\oplus$" este comutativă, adică $x\oplus y = y\oplus x$, $(\forall)x,y\in\mathbb{Z}$

$$x\oplus y = x+y+a = y+x+a = y\oplus x.$$

Elementul neutru: $(\exists)e_\oplus\in\mathbb{Z}$ astfel încât $e_\oplus\oplus x = x\oplus e_\oplus = x, (\forall)\ x\in\mathbb{Z}$.
Din ecuaţia $x\oplus e_\oplus = x \Rightarrow x+e_\oplus+a = x \Rightarrow e_\oplus = -a\in\mathbb{Z}$. Deci elementul neutru este $e_\oplus = -a$.
Element simetric: $(\forall)\ x\in\mathbb{Z}$, $(\exists)\,x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\oplus x' = e_\oplus = x'\oplus x$.
Din ecuaţia $x\oplus x' = e_\oplus$ avem $x+x'+a = -a \Rightarrow x' = -x-2a\in\mathbb{Z}$. Deci elementul simetric al unui element $x\in\mathbb{Z}$ este $x' = -x-2a$.
ii) $(\mathbb{Z},\odot)$ este monoid comutativ.
Într-adevăr, înmulţirea "$\odot$" este asociativă, întrucât pentru $x,y,z\in\mathbb{Z}$ arbitrare, putem scrie

$$(x\odot)\odot z = [(x+a)(y+a)-a]\odot z = (x+a)(y+a)(z+a)-a.$$
$$x\odot(y\odot z) = x\odot[(y+a)(z+a)-a] = (x+a)[(y+a)(z+a)-a+a]-a = (x+a)(y+a)(z+a)-a.$$

Deci $(x\odot y)\odot z = x\odot(y\odot z)$.
Arătăm că legea de compoziţie "$\odot$" este comutativă. Într-adevăr, dacă $x,y\in\mathbb{Z}$ arbitrare avem

$$x\odot y = (x+a)(y+a)-a = (y+a)(x+a)-a = y\odot x.$$

Elementul neutru faţă de operaţia "$\odot$" va fi: $(\exists)\,e_\odot\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\odot e_\odot = e_\odot\odot x = x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{Z}$. Rezolvând ecuaţia $x\odot e_\odot = x$ avem

$$(x+a)(e_\odot+a)-a = x \Rightarrow (x+a)(e_\odot+a) = x+a,\ (\forall)\,x\in\mathbb{Z}.$$

Pentru $x\neq -a$ avem $e_\odot+a = 1 \Rightarrow e_\odot = 1-a\in\mathbb{Z}$. Pentru $x = -a$ avem $-a\odot(1-a) = (-a+a)(1-a+a)-a = -a$. Deci elementul neutru este $e_\odot = 1-a$.

iii) Înmulţirea "$\odot$" este distributivă faţă de adunarea "$\oplus$". Într-adevăr, pentru $x, y, z \in \mathbb{Z}$ arbitrare, avem

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot (y + z + a) = (x + a)(y + z + a + a) - a = (x + a)(y + z + 2a) - a$$

$$\begin{aligned} x \odot y \oplus x \odot z &= [(x + a)(y + a) - a] \oplus [(x + a)(z + a) - a] = \\ &= (x + a)(y + a) - a + (x + a)(z + a) - a + a = (x + a)(y + z + 2a) - a. \end{aligned}$$

Deci $x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z$. Aceasta înseamnă că înmulţirea $\odot$ este distributivă la stânga faţă de adunarea $\oplus$ dar cum înmulţirea $\odot$ este comutativă, este asigurată şi distributivitatea la dreapta. Prin urmare, $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ este un inel comutativ cu element unitate $e_\odot$.

Pentru a arăta că în acest inel nu există divizori ai lui zero, revine la a arăta că $x \odot y = e_\oplus \Rightarrow x = e_\oplus$ sau $y = e_\oplus$.

Într-adevăr, $x \odot y = e_\oplus \Leftrightarrow (x + a)(y + a) - a = -a \Rightarrow (x + a)(y + a) = 0 \Rightarrow x + a = 0$ sau $y + a = 0 \Rightarrow x = -a$ sau $y = -a$ adică $x = e_\oplus$ sau $y = e_\oplus$.

b) Determinăm grupul $(U(\mathbb{Z}), \odot)$ al elementelor inversabile. Avem $x \in U(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\exists) x^{-1} \in \mathbb{Z}$ cu $x \odot x^{-1} = x^{-1} \odot x = e_\odot \Leftrightarrow (x + a)(x^{-1} + a) - a = 1 - a \Rightarrow (x + a)(x^{-1} + a) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + a \in \{-1, 1\} \\ x^{-1} + a \in \{-1, 1\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \{-1 - a, 1 - a = e_\odot\} \\ x^{-1} \in (-1 - a, 1 - a = e_\odot\} \end{cases}.$$

Aşadar, $U(\mathbb{Z}) = \{-1 - a, 1 - a = e_\odot\}$ este un grup ciclic de ordinul 2. Să remarcăm că pentru $a = 0$ inelul $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ coincide cu inelul obişnuit $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

3.2.37 $(\mathbb{C}, +)$ este un grup comutativ. Arătăm că $(\mathbb{C}, *)$ este un monoid.

Verificăm asociativitatea operaţiei "*". $(\forall) z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ avem

$$\begin{aligned} (z_1 * z_2) * z_3 &= [(a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i)] * (a_3 + b_3 i) = [a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i] * (a_3 + b_3 i) = \\ &= a_1 a_2 a_3 + (a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1) i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 * (z_2 * z_3) &= (a_1 + b_1 i) * [(a_2 + b_2 i) * (a_3 + b_3 i)] = (a_1 + b_1 i) * [a_2 a_3 + (a_2 b_3 + a_3 b_2) i] = \\ &= a_1 a_2 a_3 + (a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1) i. \end{aligned}$$

Deci, $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$, $(\forall)\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Verificăm comutativitatea operaţiei "*". Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sunt elemente arbitrare, atunci

$$z_1 * z_2 = (a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = a_2 a_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) i = z_2 * z_1.$$

Element neutru: $(\exists)$ $e_{\circledast} \in \mathbb{C}$ astfel încât $e * z = z * e = z$ pentru $z \in \mathbb{C}$ ales arbitrar. Rezolvând ecuaţia $z * e = z$ vom avea

$(a + bi) * (x + yi) = a + bi$ sau $ax + (ay + bx)i = a + bi \Rightarrow \begin{cases} ax = a \\ ay + bx = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ay = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$

Elementul neutru este $e = 1$.

Elementul nul este $e_\oplus = 0$ şi dacă operăm $i * i = 0$ rezultă că i este divizor al lui zero.

3.2.39 Fie $x \in A$. Deoarece $x + x \in A$ rezultă că $x + x$ este idempotent şi vom avea

$$(x + x)^2 = x + x \tag{1}$$

Pe de altă parte, putem scrie

$$(x + x)^2 = (x + x)(x + x) = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x + x + x.$$

Aşadar,

$$(x + x)^2 = x + x + x + x. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă $x + x = x + x + x + x$, de unde considerând opusul lui x şi anume pe $-x$ vom avea $x + x = 0$. Dacă A este inel cu element unitate, rezultă că în particular $1 + 1 = 0$, adică char$A = 2$.

b) Fie $x, y \in A$. Din ipoteză avem $(x+y)^2 = x+y$. Dar $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 - xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$, adică $x + y = x + xy + yx + y$, de unde rezultă că $xy + yx = 0$, adică $xy = -(yx)$. Din $x + x = 0$ rezultă că $x = -x$, adică orice element din A este egal cu opusul său şi atunci rezultă că

$$xy = -(yx) = yx.$$

Cum $x, y \in A$ au fost arbitrare, rezultă că inelul A este comutativ.

c) Dacă $R \neq \{0\}$ este integru şi $a, b \in R\backslash\{0\}$, atunci $ab(a + b) = a^2b + ab^2 = ab + ab = 0$ conform celor demonstrate la punctul 1^0. Cum R este domeniu de integritate şi $a, b \neq 0$ rezultă că $a + b = 0$, deci $a = -b = b$ şi prin urmare toate elementele nenule ale lui R sunt egale între ele. Aceasta demonstrează că R are doar două elemente şi este izomorf cu $\mathbb{Z}_2$.

3.2.39 Se arată relativ uşor că $(A, +)$ este un grup comutativ. Elementul zero fiind $(0, 0)$ şi pentru $(\forall)$ $a, b \in \mathbb{Z}$ opusul lui $(a, b) \in A$ este $(-a, -b) \in A$.

Să arătăm, în continuare că $(A, *)$ este un grup comutativ cu unitate. Fie $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in A$ alese arbitrar. Vom avea

$$[(a_1, b_1) * (a_2, b_2)] * (a_3, b_3) = (a_1a_2 + 3b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) * (a_3, b_3) =$$

$$= a_1a_2a_3 + 3a_3b_1b_2 + 3a_1b_2b_3 + 3a_2b_1b_3,\ a_1a_2b_3 + 3b_1b_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1); \tag{1}$$

$$(a_1, b_1) * [(a_2, b_2) * (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) * (a_2a_3 + 3b_2b_3, a_2b_3 + a_3b_2) =$$

$$= a_1a_2a_3 + 3a_1b_2b_3 + 3a_2b_1b_3 + 3a_3b_1b_2,\ a_1a_2b_3 + 3b_1b_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1). \tag{2}$$

Comparând (1) cu (2) obţinem $[(a_1, b_1) * (a_2, b_2)] * (a_3, b_3) = (a_1, b_1) * [(a_2, b_2) * (a_3, b_3)]$.

Comutativitatea înmulţirii:

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) * (a_2, b_2) &= (a_1a_3 + 3b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) = (a_3a_2 + 3b_2b_1, a_2b_1 + a_1b_2) = \\ &= (a_2, b_2) * (a_1, b_1)\,,\ \ (\forall)\,(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A.\end{aligned}$$

Elementul unitate: $(\exists)$ $(e_1, e_2) \in A$ astfel încât $(e_1, e_2) * (a_1, b_1) = (a_1, b_1) * (e_1, e_2) = (a_1, b_1)$, $(\forall)$ $(a_1, b_1) \in A$.

Rezolvăm ecuaţia $(a_1, b_1) * (e_1, e_2) = (a_1, b_1) \Leftrightarrow (a_1e_1 + 3b_1e_2, a_1e_2 + b_1e_1) = (a_1, b_1)\,,\ (\forall)\,(a_1, b_1) \in A$.

Avem sistemul: $\left\{\begin{array}{l} a_1e_1 + 3b_1e_2 = a \\ b_1e_1 + a_1e_2 = b \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot(-b) \\ \cdot\, a \end{array}\right.$ $\Rightarrow (a_1^2 - 3b_1^2)e_2 = 0$; $a_1^2 \neq 3b_1^2$, $(\forall)(a_1, b_1) \in A$ cu $\left\{\begin{array}{l} a_1 \neq 0 \\ b_1 \neq 0 \end{array}\right.$. Rezultă că $e_2 = 0$. Din $\left\{\begin{array}{l} a_1e_1 = a \\ b_1e_1 = b \end{array}\right.$ $\Rightarrow e_1 = 1$. Deci elementul unitate este $(1, 0) \in A$.

Distributivitatea:

$$\begin{aligned}[(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] * (a_3, b_3) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) * (a_3, b_3) = \\ &= (a_1a_3 + a_2a_3 + 3b_1b_3 + 3b_2b_3, a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) * (a_3, b_3) + (a_2, b_2) * (a_3, b_3) &= (a_1a_3 + 3b_1b_3, a_1b_3 + a_3b_1) + (a_2a_3 + 3b_2b_3, a_2b_3 + a_3b_2) = \\ &= (a_1a_3 + a_2a_3 + 3b_1b_3 + 3b_2b_3, a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2)\end{aligned}$$

Rezultă că

$$[(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] * (a_3, b_3) = (a_1, b_1) * (a_3, b_3) + (a_2, b_2) * (a_3, b_3), (\forall)(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in A.$$

În concluzie, $(A, +, *)$ este inel comutativ.

Să arătăm, în continuare, că inelul A este fără divizori ai lui zero. Fie $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A$, $a_1, b_1 \neq 0$ cu proprietatea că $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (0, 0)$, adică

$$\left\{\begin{array}{l} a_1a_2 + 3b_1b_2 = 0 \\ a_1b_2 + a_2b_1 = 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot b_2 \\ \cdot(-a_2) \end{array}\right.$$

$$3b_1b_2^2 - a_2^2b_1 = 0 \Rightarrow b_1(3b_2^2 - a_2^2) = 0, (\forall)a_1, b_1 \in \mathbb{Z}, a_2^2 \neq 3b_2^2 \Rightarrow b_1 = 0,$$

$$a_1b_1 \neq 0, b_1 = 0 \Rightarrow a_1 \neq 0 \text{ şi } \begin{cases} a_1a_2 = 0 \\ a_1b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 0. \end{cases}$$

În concluzie nu există divizori ai lui zero.

3.2.40 a) Se arată relativ uşor că operaţia " $+$ " este asociativă, comutativă, elementul neutru faţă de adunare este $e = (0,0)$ şi oricare ar fi $(a,b) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ simetricul lui este $(-a,-b) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, adică $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},+)$ este grup comutativ.

Din calcule, rezultă că operaţia "$\top$" este asociativă şi comutativă. Să vedem, mai departe, existenţa elementului neutru faţă de operaţia "$\top$": $(\exists)$ $e' = (e_1, e_2) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ astfel încât

$$(a,b) \top (e_1,e_2) = (a,b) = (e_1,e_2) \top (a,b).$$

Rezolvând ecuaţia $(a,b) \top (e_1,e_2) = (a,b)$ vom avea

$$\begin{aligned} (ae_1 - be_2, ae_2 + be_1 + be_2) &= (a,b) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ae_1 - be_2 = a \\ be_1 + (a+b)e_2 = b \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot(-b) \\ \cdot(+a) \end{array}\right. \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a^2+ab+b^2)e_2 = 0\,,\ (\forall)\ a,b \in \mathbb{Q} \Rightarrow e_2 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} ae_1 = a \\ be_1 = b \end{cases} (\forall)\ (a,b) \in \mathbb{Q} \Rightarrow e_2 = 1. \end{aligned}$$

Elementul neutru faţă de operaţia "$\top$" este $e' = (1,0) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

Să vedem, mai departe, dacă $(\forall)$ $(a,b) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, $(a,b) \neq (0,0)$, $(\exists)$ $(a',b') \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ astfel încât $(a,b)\top(a',b') = (1,0) = (a',b')\top(a,b)$.

Rezolvând ecuaţia $(a,b)\top(a',b') = (1,0)$ avem: $(aa' - bb', ab' + a'b + bb') = (1,0)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} aa' - bb' = 1 \\ ba' + (a+b)b' = 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot(-b) \\ \cdot a \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b^2+a^2+ab)b' = -b \Rightarrow b' = -\frac{b}{a^2+b^2+ab},\ \ a \neq 0 \text{ sau } b \neq 0.$$

$$a' = -\frac{a+b}{b}\cdot b' = -\frac{a+b}{b}\cdot\left(-\frac{b}{a^2+ab+b^2}\right) = \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}.$$

Deci $(\forall)$ $(a,b) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, unde $(a,b) \neq (0,0)$ este inversabil şi

$$(a',b') = \left(\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}, -\frac{b}{a^2+ab+b^2}\right).$$

Distributivitatea se verifică prin calcul. Deci $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},+,\top)$ este corp comutativ.

b) Fie funcţia $f : \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \to K,\ f(z) = (a-b, 2b)\,,\ z \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3}),\ z = a + b\sqrt{-3}$ cu $a,b \in \mathbb{Q}$. Să verificăm că f este omomorfism bijectiv.

$$\begin{aligned} f(z_1+z_2) &= f(z_1) + f(z_2) \\ f(z_1\cdot z_2) &= f(z_1)\top f(z_2), \end{aligned}$$

pentru $z_1, z_2 \in Q(\sqrt{-3})$, $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{-3}, z_2 = a_2 + b_2\sqrt{-3}$. Avem

$$\begin{aligned} f(z_1+z_2) &= f(a_1+a_2+(b_1+b_2)\sqrt{-3}) = (a_1+a_2-b_1-b_2, 2b_1+2b_2) = \\ &= (a_1-b_1+a_2-b_2, 2b_1+2b_2) = (a_1-b_1, 2b_1) + (a_2-b_2, 2b_2) = f(z_1)+f(z_2). \end{aligned}$$

$$f(z_1\cdot z_2) = (a_1a_2 - 3b_1b_2 - a_1b_2 - a_2b_1, 2a_1b_2 + 2a_2b_1) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} f(z_1)\top f(z_2) &= (a_1-b_1, 2b_1)\top(a_2-b_2, 2b_2) = \\ &= (a_1a_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + b_1b_2 - 4b_1b_2, 2a_1b_2 - 2b_1b_2 + 2a_2b_1 - 2b_1b_2 + 4b_1b_2) = \\ &= (a_1a_2 - 3b_1b_2 - a_1b_2 - a_2b_1, 2a_1b_2 + 2a_2b_1) \end{aligned} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \top f(z_2)$, adică f este omomorfism.

Să verificăm **injectivitatea**. Dacă $f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow (a_1 - b_1, 2b_1) = (a_2 - b_2, 2b_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} a_1 - b_1 = a_2 - b_2 \\ 2b_1 = 2b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$, deci $z_1 = z_2 \Rightarrow f$ este injectivă.

Surjectivitatea: Fie $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, avem de rezolvat ecuaţia $f(z) = (a, b)$, unde $z = a_1 + b_1\sqrt{-3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ adică $(a_1 - b_1, 2b_1) = (a, b) = \begin{cases} a_1 - b_1 = a \\ 2b_1 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a + \dfrac{b}{2} \in \mathbb{Q} \\ b_1 = \dfrac{b}{2} \in \mathbb{Q} \end{cases}$, deci f este surjectivă.

Prin urmare f este bijectivă şi deci $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

3.2.41. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel cu $1-$unitate. Pentru orice $a, b \in R$ avem

$$(1 + 1) \cdot (a + b) = 1 \cdot (a + b) + 1 \cdot (a + b) = 1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot a + 1 \cdot b = a + b + a + b.$$

Folosind distributivitatea înmulţirii faţă de adunare

$$(1 + 1) \cdot (a + b) = (1 + 1) \cdot a + (1 + 1) \cdot b = a + a + b + b,$$

de unde deducem că $a + a + b + b = a + b + a + b$. Adunând la stânga opusul lui a, iar la dreapta opusul lui b obţinem $b + a = a + b$. Deoarece $a, b \in R$ au fost alese arbitrar rezultă că "+" este comutativă.

3.2.42 Dacă considerăm inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ al matricilor pătratice de ordin 2 cu coeficienţi din $\mathbb{Z}_2$, $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2), +, \cdot)$ are 16 elemente, este un inel necomutativ. Într-adevăr, dacă considerăm elementele $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ prin înmulţire vom avea

$$\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} \end{pmatrix}.$$

Deci $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} \end{pmatrix}$, adică $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ este inel necomutativ. Nu există corpuri finite necomutative conform teoremei lui Wedderburn.

3.2.43 a)Din

$$\left.\begin{array}{l} (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 \\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{array}\right| \Rightarrow a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2.$$

Cum în grupul $(R, +)$ se poate simplifica cu orice element rezultă că $ba = ab$.

Reciproc, dacă $ab = ba$, atunci

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Din $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \Rightarrow a^2 - b^2 = a^2 + ab - ba - b^2 \Rightarrow ab - ba = 0 \Rightarrow ab = ba$.

Reciproc, dacă $ab = ba$, atunci $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$.

b) Demonstrăm prin inducţie după n.

Pentru $n = 1$, $(a + b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b$. Deci egalitatea se verifică.

Pentru $n = 2$, $(a + b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 a \cdot b + C_2^2 b^2$.

Dacă egalitatea este adevărată pentru n atunci

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n (a + b) = (C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n)a+$$

$$+(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n)b =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + (C_n^1 + C_n^0)a^n b + \ldots + (C_n^n + C_n^{n-1})ab^n + C_n^n b^{n+1}.$$

Cum $C_n^0 = C_n^n = 1$ şi $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $1 \le k \le n$, avem

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \ldots + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}.$$

Deci egalitatea (*) din enunţ este adevărată pentru $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Din faptul că $ab = ba$ rezultă $a^m \cdot b^n = b^n \cdot a^m$, $(\forall)$ $m, n \in \mathbb{N}^*$ (se arată prin inducţie după m respectiv n). $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + a^{n-1}b + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - ba^{n-1} - ba^{n-2}b - \ldots - bab^{n-2} - b^n = a^n + a^{n-1}b + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \ldots - ab^{n-1} - b^n = a^n - b^n$

Analog, pentru ultima egalitate.

3.2.44 $(\forall)$ $x \in R = x^6 = x \Rightarrow -x = (-x)^6 = x^6 = x \Rightarrow x + x = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x = 0$, adică car$R = 2$. Atunci

$$\begin{aligned}(x+x^2)^6 &= x^6 + 6x^7 + 15x^8 + 20x^9 + 15x^{10} + 6x^{11} + x^{12} = \\ &= x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} = x + x^3 + x^5 + x^2.\end{aligned} \tag{1}$$

Dar

$$(x+x^2)^6 = x + x^2. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $x + x^2 = x + x^3 + x^5 + x^2$ adică $x^3 + x^5 = 0$ sau $x^5 = -x^3 = x^3$. Rezultă $x = x^6 = x^2 \cdot x^4 = x^2 \cdot x = x^3 = x^2$.

3.2.45 $\widehat{4}x + \widehat{5} = \widehat{9} \Rightarrow \widehat{4}x = \widehat{9} - \widehat{5} \Rightarrow \widehat{4}x = \widehat{4} \Rightarrow x \in \{\widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{7}, \widehat{10}\}$

$\cdot$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{5}$	$\widehat{6}$	$\widehat{7}$	$\widehat{8}$	$\widehat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$
$\widehat{4}$	$\widehat{\mathbf{4}}$	$\widehat{8}$	$\widehat{0}$	$\widehat{\mathbf{4}}$	$\widehat{8}$	$\widehat{0}$	$\widehat{\mathbf{4}}$	$\widehat{8}$	$\widehat{0}$	$\widehat{\mathbf{4}}$	$\widehat{8}$

$\widehat{5}x + \widehat{5} = \widehat{9} \Rightarrow \widehat{5}x = \widehat{4}$. Deoarece $(5, 7) = 1$ există $\widehat{5}^{-1} \in \mathbb{Z}_{12}$ şi anume $\widehat{5}^{-1} = \widehat{5}$

Vom avea, $x = \widehat{5}^{-1} \cdot 4 = \widehat{5} \cdot \widehat{4} = \widehat{8} \Rightarrow x = \widehat{8}$

Fie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - 2c \\ b = 2 - 2d \end{cases}.$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei matriceale este

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1-2c & 2-2d \\ c & d \end{pmatrix}, \ c, d \in \mathbb{C} \right\}.$$

3.2.46 $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\widehat{1}, \widehat{5}, \widehat{7}, \widehat{11}\}$. Divizorii lui zero sunt elemente neinversabile în $\mathbb{Z}_{12}$, adică $\{\widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{8}, \widehat{9}, \widehat{10}\}$.

Coeficienţii lui x şi y fiind divizorii lui zero, aplicarea metodei reducerii poate conduce la sisteme neechivalente. Adunând cele două ecuaţii ale sistemului dat obţinem

$$\widehat{7}x + \widehat{y} = \widehat{9} \Leftrightarrow \widehat{y} = \widehat{5}x + \widehat{9}.$$

Vom avea

$$\begin{cases} \widehat{3}x + \widehat{4}y = \widehat{11} \\ \widehat{y} = \widehat{5}x + \widehat{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{3}x + \widehat{4}(\widehat{5}x + \widehat{9}) = \widehat{11} \\ y = \widehat{5}x + \widehat{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 8x = 11 \\ y = \widehat{5}x + \widehat{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{11}x = \widehat{11} \\ y = \widehat{5}x + \widehat{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \widehat{1} \\ y = \widehat{5} + \widehat{9} = \widehat{2}. \end{cases}$$

Deci sistemul are soluţie unică pe $(\widehat{1}, \widehat{2})$.

3.2.47 Avem $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ deci $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \neq \emptyset$. Pentru orice $u = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $v = a' + b'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$:

$$\begin{aligned} &u - v = (a - a') + (b - b')\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \\ &u \cdot v = (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Deci, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este un subinel al lui $(\mathbb{R},+,\cdot)$ care conţine unitatea 1.

Arătăm în continuare că subinelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este generat de $\{1,\sqrt{2}\}$. Evident că

$$\{1,\sqrt{2}\}\subseteq\mathbb{Z}[\sqrt{2}]. \tag{1}$$

Fie A subinel al lui $(\mathbb{R},+,\cdot)$ şi $\{1,\sqrt{2}\}\subseteq A$. Să arătăm că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\subseteq A$, adică $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este cel mai mic subinel al lui $(\mathbb{R},+,\cdot)$ care conţine pe $\{1,\sqrt{2}\}$. Din faptul că A este subgrup al lui $(\mathbb{R},+)$ şi $1\in A$ rezultă că $1+1\in A\Leftrightarrow 2\in A$; $2+1\in A\Leftrightarrow 3\in A$ ş.a.m.d. $k\in A$, $(\forall)\,k\in\mathbb{N}$. Din $1\in A$ rezultă că $-1\in A$ şi $-1-1\in A$ ş.a.m.d. $-k\in A$, adică $\mathbb{Z}\subseteq A$. Analog, din faptul că $\sqrt{2}\in A$ şi că A este subgrup al lui $(\mathbb{R},+)$ se arată că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\subseteq A$. Din faptul că $\mathbb{Z},\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\subseteq A$ şi din faptul că $(A,+)$ este grup rezultă că $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{2}\subseteq A$ adică

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\subseteq A \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este cel mai mic subinel al lui $\mathbb{R}$ care include pe $\{1,\sqrt{2}\}$ adică $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este subinelul generat de $\{1,\sqrt{2}\}$.

ii) $1=1+0\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\}\neq\emptyset$, $\left|\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right|\geq 2$.

Pentru orice $x=a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $y=a'+b'\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avem

$$\begin{aligned}x-y&=(a-a')+(b-b')\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})\\ x\cdot y&=(aa'+2bb')+(ab'+a'b)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})\end{aligned}$$

Fie $x=a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $a\neq 0$ sau $b\neq 0$, adică $x\neq 0$. Avem $(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})=a^2-2b^2\neq 0$ (dacă $a^2-2b^2=0$ atunci $a^2=2b^2$ şi pentru $b\neq 0$ am avea $\dfrac{a^2}{b^2}=2$ adică $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}$ ceea ce este fals).

Avem $x^{-1}=\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}}=\dfrac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\dfrac{a}{a^2-2b^2}-\dfrac{b}{a^2-2b^2}\cdot\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Deci $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este subgrup al lui $(\mathbb{R},+)$.

Arătăm în continuare că $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este generat de $\sqrt{2}$. Evident, $\sqrt{2}=0+1\cdot\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Fie A subcorp al lui $(\mathbb{R},+,\cdot)$ cu proprietatea că $\sqrt{2}\in A$. Se arată, în continuare, că $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subseteq A$, adică $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este cel mai mic subcorp al corpului $(\mathbb{R},+,\cdot)$ care conţine pe $\sqrt{2}$. A fiind subcorp al lui $(\mathbb{R},+,\cdot)$ rezultă că $0,1\in A$.

Deoarece $(A,+)$ este subgrup al lui $(\mathbb{R},+)$ rezultă, analog ca la punctul i) că $\mathbb{Z}\subseteq A$.

Din faptul că $(A,+,\cdot)$ este subgrup al lui $(\mathbb{R},+,\cdot)$ rezultă că $(A^*,\cdot)$ este subgrup al lui $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

Deoarece $1\in A$ rezută că $<1>=\mathbb{Z}\subseteq A$ adică pentru orice $k\in\mathbb{Z}^*$ avem $k\in A^*$ şi din faptul că $(A^*,\cdot)$ este subgrup rezultă că şi $k^{-1}=\dfrac{1}{k}\in A^*$. Pentru orice $\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}^*$ avem $\dfrac{m}{n}=\underbrace{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\ldots+\dfrac{1}{n}}_{m\text{ ori}}\in A^*$.

În concluzie $\mathbb{Q}^*\subseteq A^*$ şi deci $\mathbb{Q}\subseteq A$.

Din faptul că $\sqrt{2}\in A$, rezultă că şi $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}\subseteq A$, adică $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subseteq A$. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fiind cel mai mic subcorp al lui $\mathbb{R}$ care îl conţine pe $\sqrt{2}$, rezultă că $\sqrt{2}$ generează acest subcorp.

iii) Fie $\alpha=\sqrt[3]{2}\in S_1$. Rezultă $\alpha^2=\sqrt[3]{4}$. Presupunem că $\alpha^2\in S_1$. Rezultă că există $x,y\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\alpha^2=x+y\sqrt[3]{2}=x+y\alpha$, ceea ce implică $\alpha^3=(x+y\alpha)\cdot\alpha=x\alpha+y\alpha^2$. Rezultă că $2=x\alpha+y(x+y\alpha)$. Deci $2=xy+(x+y^2)\alpha$ şi deci $xy=2$ şi $x+y^2=0$. Rezolvăm sistemul:

$$\left\{\begin{array}{l}xy=2\\ x+y^2=0\end{array}\right..$$

Aceasta conduce la

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{l}x=1;\ y=2\\ 4=-1\text{ Fals!}\end{array}\right.\ \text{II.}\left\{\begin{array}{l}x=2;\ y=1\\ 1=-2\text{ Fals!}\end{array}\right.\ \text{III.}\left\{\begin{array}{l}x=-1;\ y=-2\\ 4=1\text{ Fals!}\end{array}\right.\ \text{IV.}\left\{\begin{array}{l}x=-2;\ y=-1\\ -1+4=0\text{ Fals!}\end{array}\right.$$

Rezultă că sistemul nu are soluţii întregi şi deci $\alpha^2\notin S_1$. În concluzie S_1 nu este stabilă în raport cu " $\cdot$ " şi deci S_1 nu este subinel al lui $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

iv) Analog punctului iii) trebuie rezolvat sistemul $\begin{cases} x\cdot y=2 \\ x+y^2=0 \end{cases}$ unde $x,y\in\mathbb{Q}$. Pentru $x<0$ avem $\begin{cases} -y^2\cdot y=2 \\ -y^2=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y^3=2 \\ x=-y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt[3]{-2}\notin\mathbb{Q} \\ x=-y^3 \end{cases}$ şi deci sistemul nu are soluţii raţionale.

În concluzie $\alpha=\sqrt[3]{2}\in S_2$ dar $\alpha^2\notin S_2$ şi deci S_2 nu este stabilă în raport cu "$\cdot$" adică S_2 nu este subcorp cu $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

Observaţii.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\sqrt{2}] &= <\mathbb{Z}\cup\{\sqrt{2}\}>. \\ \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &= <\mathbb{Q}\cup\{\sqrt{2}\}>. \end{aligned}$$

3.2.48 Fie $z_1=a_1+b_1\sqrt{d}$, $z_2=a_2+b_2\sqrt{d}$ din $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]=\left\{a+b\sqrt{d}\mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1\sqrt{d})(a_2+b_2\sqrt{d})=a_1a_2+db_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{d}$.

$\overline{z_1\cdot z_2}=a_1a_2+b_1b_2d-(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{d}$.

$(z_1\cdot z_2)\cdot(\overline{z_1\cdot z_2})=(a_1a_2+b_1b_2d)^2-d(a_1b_2+a_2b_1)^2=a_1^2a_2^2+2a_1a_2b_1b_2d+b_1^2b_2^2d^2-$
$-a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2d-a_2^2b_1^2d=a_1^2a_2^2-a_1^2b_2^2d-a_2^2b_1^2d+4b_1^2b_2^2d$

$$\varphi(z_1\cdot z_2)=\left|a_1^2a_2^2-a_1^2b_2^2d-a_2^2b_1^2d+4b_1^2b_2^2d\right| \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z_1)\cdot\varphi(z_2)=\left|a_1^2-db_1^2\right|\cdot\left|a_2^2-db_2^2\right|=\left|(a_1^2-b_1^2d)(a_2^2-b_2^2d)\right|= \\ =\left|a_1^2a_2^2-a_1^2b_2^2d-a_2^2b_1^2d+4b_1^2b_2^2d\right| \end{aligned} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\varphi(z_1\cdot z_2)=\varphi(z_1)\cdot\varphi(z_2)$ pentru orice $z_1,z_2\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Observaţii. Omomorfismul se poate arăta astfel:

$$\begin{aligned} \varphi(z_1\cdot z_2) &= |z_1\cdot z_2\cdot\overline{z_1\cdot z_2}|=|z_1\cdot z_2\cdot\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2|=|(z_1\cdot\overline{z}_1)\cdot(z_2\cdot\overline{z}_2|= \\ &= |z_1\cdot\overline{z}_1|\cdot|z_2\cdot\overline{z}_2|=\varphi(z_1)\cdot\varphi(z_2)\,,\ \text{pentru orice } z_1,z_2\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]. \end{aligned}$$

Fie $z\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ inversabil. Atunci există z^{-1} astfel încât $z\cdot z^{-1}=z^{-1}\cdot z=1$. Avem $\varphi(z\cdot z^{-1})=\varphi(1)=1$ şi $\varphi(z)\cdot\varphi(z^{-1})=1$ în $\mathbb{N}$ ceea ce implică $\varphi(z)=1$.

Reciproc, dacă $\varphi(z)=1$ atunci $|z\cdot\overline{z}|=1$ şi deci $z\cdot\overline{z}=1$ sau $z\cdot\overline{z}=-1$, adică $z^{-1}=\overline{z}$ sau $z^{-1}=-\overline{z}$.

3.2.49 Fie funcţia $\varphi:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{N}$, $\varphi(z)=|z\cdot\overline{z}|$. Dacă $z=a+b\sqrt{2}$ atunci $\varphi(z)=\left|a^2-2b^2\right|$. Conform, problemei anterioare z este inversabil dacă şi numai dacă $\varphi(z)=1$, adică $z\in U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])\Leftrightarrow\left|a^2-2b^2\right|=1$. Deci $z\in U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])\Leftrightarrow a^2-2b^2=\pm1$. Această egalitate este satisfăcută pentru $z_1=1, z_2=-1, z_3=1+\sqrt{2}, z_4=(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$, $z_5=(1+\sqrt{2})^3=7+5\sqrt{2}$ şi în general pentru orice putere a lui $1+\sqrt{2}$. Cum şirul puterilor lui $1+\sqrt{2}$ este infinit rezultă că există o infinitate de elemente inversabile în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

3.2.50 Evident $R\neq\emptyset$ $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in R\right)$. Fie $A=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\2b_1&a_1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\2b_2&a_2\end{pmatrix}$.

$A-B=\begin{pmatrix}a_1-a_2&b_1-b_2\\2(b_1-b_2)&a_1-a_2\end{pmatrix}\in R$.

$A\cdot B=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\2b_1&a_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_2&b_2\\2b_2&a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2+2b_1b_2&a_1b_2+a_2b_1\\2(a_1b_2+a_2b_1)&a_1a_2+2b_1b_2\end{pmatrix}\in R$.

Deci R este subinel în $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),+,\cdot)$.

Avem $|R|\geq2$ şi că $A\cdot B=\begin{pmatrix}a_1a_2+2b_1b_2&a_1b_2+a_2b_1\\2(a_1b_2+a_2b_1)&a_1a_2+2b_1b_2\end{pmatrix}$.

$B\cdot A=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\2b_2&a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1&b_1\\2b_1&a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2a_1+2b_2b_1&a_2b_1+a_1b_2\\2(b_2a_1+a_2b_1)&2b_2b_1+a_2a_1\end{pmatrix}=$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2(a_1b_2 + a_2b_1) & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix} = A \cdot B,$$

adică operaţia "$\cdot$" din R este comutativă.

Avem $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ este elementul unitate în $(R, \cdot)$.

Mai trebuie arătat că $(R, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui zero. Presupunem că $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, adică $a_1 \neq 0$ sau $b_1 \neq 0$ şi că $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ceea ce este echivalent cu

$$\begin{cases} a_1a_2 + 2b_1b_2 = 0 \\ a_1b_2 + a_2b_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1a_2 + 2b_1b_2 = 0 \\ b_1a_2 + a_1b_2 = 0 \end{cases}.$$

Avem un sistem liniar şi omogen în necunoscutele a_2, b_2 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - 2b_1^2 \neq 0$ deoarece $\sqrt{2} \in R \setminus \mathbb{Q}$.

Deci singura soluţie a sistemului este $a_2 = b_2 = 0$ ceea ce arată că

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{şi } A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

adică $(R, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui zero.

În concluzie $(R, +, \cdot)$ este un domeniu de integritate.

b) Fie funcţia $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to R$, $f\left(a + b\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$.

Arătăm că f este izomorfism de inele. Dacă $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ şi $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$ două elemente oarecare din $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, atunci

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2} \text{şi} z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 + 2b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}.$$

Avem

$$f(z_1 + z_2) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 2(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = f(z_1) + f(z_2).$$

$$f(z_1 \cdot z_2) = \begin{pmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 2(a_1b_2 + a_2b_1) & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} = f(z_1) \cdot f(z_2)$$

pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, adică f este omomorfism de inele. Mai trebuie arătată bijectivitatea funcţiei f.

Dacă $f(z_1) = f(z_2)$, adică $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 2b_2 & a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$, atunci $a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2} \Leftrightarrow z_1 = z_2$ şi deci f este injectivă.

Surjectivitatea este evidentă.

3.2.51 Reamintim că elementul neutru în $(\mathbb{Z}, \perp)$ este $e_\perp = -3$ iar în $(\mathbb{Z}, \top)$ este $e_\top = -2$. Dacă $x \in \mathbb{Z}$ simetricul lui în $(\mathbb{Z}, \perp)$ este $x' = -6 - x$. Presupunem că $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ este un izomorfism, rezultă că $f(0) = e_\perp$ şi $f(1) = e_\top$ adică $f(0) = -3$ şi $f(1) = -2$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + \ldots 1}_{\text{n ori}}) = (\underbrace{f(1) \perp f(1) \perp \ldots \perp f(1)}_{\text{n ori}}) =$$
$$= (\underbrace{(-2) \perp (-2) \perp \ldots \perp (-2)}_{\text{n ori}}) = (-2) \cdot n + 3(n - 1) = n - 3$$

$f(-n)$ coincide cu $f(n)'$ adică simetricul lui $f(n)$ în $(\mathbb{Z}, \perp)$, adică

$$f(-n) = f(n)' = -6 - f(n) = -6 - (n - 3) = -n - 3.$$

Deci $f(x) = x - 3$ pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

Arătăm, acum, că funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 3$ este un izomorfism. Pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$ avem
$f(x + y) = x + y - 3 = x - 3 + y - 3 + 3 = f(x) \perp f(y)$
$f(x \cdot y) = x \cdot y - 3 = (x - 3 + 3) \cdot (y - 3 + 3) - 3 = f(x) \top f(y)$
adică f este omomorfism de inele.

Pentru orice $y \in \mathbb{Z}$ ecuaţia $f(x) = y \Leftrightarrow x - 3 = y$ are o soluţie unică $x = y + 3 \in \mathbb{Z}$ adică f este bijectivă.

În concluzie, f este izomorfism.

3.2.52 Din ipoteză, rezultă că orice $x \in A\backslash\{0\}$ este inversabil având inversul $x^{-1} = x$, deci A este corp. Fie $x \in A\backslash\{0\}$ arbitrar. Egalitatea $x^2 - 1 = 0$ se mai scrie $(x - 1)(x + 1) = 0$ şi deoarece un corp nu are divizori ai lui zero, rezultă că $x = 1$ sau $x = -1$, adică $x \in \{-1, 1\}$. Rezultă $A\backslash\{0\} \subseteq \{-1, 1\}$, deci $A \subseteq \{-1, 0, 1\}$. Dar $-1^2 = 1$, $g^2 = 1$ rezultă că $\{-1, 0, 1\} \subseteq A$, deci $A = \{-1, 0, 1\}$. Distingem două cazuri după cum $-1 = 1$ respectiv $-1 \neq 1$.

a) $1 = -1 \Leftrightarrow 1 + 1 = 0$ adică corpul A are caracteristica 2. Rezultă $A = \{0, 1\}$ şi deci $A \simeq \mathbb{Z}_2$.

b) $1 \neq -1$. Atunci în grupul $(A, +)$ avem $1 + 1 \neq 0$ dar $1 + 1 + 1 = 0$ căci ordinul grupului este 3. Deci corpul A are caracteristica 3.

Atunci, $-1 = 1 + 1$ şi $A = \{0, 1, 1 + 1\}$. Rezultă $A \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_3$.

3.2.53 Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ omomorfism de corpuri.
$f(0) = 0\,,\ f(1) = 1$
$f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$
$f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{n ori}}) = (\underbrace{f(1) + f(1) + \ldots + f(1)}_{\text{n ori}}) = nf(1) = n,$ iar
$f(-n) = -f(n) = -n\ (\forall)\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(k) = k\,,\ (\forall)\ k \in \mathbb{Z}$.
Întrucât $1 = f\left(n \cdot \dfrac{1}{n}\right) = n \cdot f\left(\dfrac{1}{n}\right) = n \cdot f(n^{-1}) \Rightarrow f(n^{-1}) = \dfrac{1}{n}\,,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$.
Pentru orice $x \in \mathbb{Q}$ există $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ astfel încât $x = \dfrac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ şi deci

$$f(x) = f(a \cdot b^{-1}) = a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b} = x\,,\ (\forall)\, x \in \mathbb{Q}.$$

Fie $g : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ un automorfism. Avem $g(x) = x\,,\ (\forall)\, x \in \mathbb{Q}$. Fie $z = a + b\sqrt{2}$, atunci $g(z) = g(a + b\sqrt{2}) = g(a) + g(b) \cdot g(\sqrt{2}) = a + b \cdot g(\sqrt{2})$. Din $(\sqrt{2})^2 = 2$ rezultă că

$$z = g(2) = g[(\sqrt{2})^2] = [g(\sqrt{2})]^2 \Rightarrow g(\sqrt{2}) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}.$$

Dacă $g_1(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, atunci $g_1(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$, iar dacă $g_2(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, atunci

$$g_2(a + b(\sqrt{2}) = a - \sqrt{2}.$$

Din $g_1 = 1_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ rezultă că g_1 este automorfism. Avem

$$(g_2 \circ g_2)(z) = g_2(a - b\sqrt{2}) = a - (-b)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2} = 1_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(z),$$

adică $g_2 \circ g_2 = 1_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ ceea ce implică g_2 bijecţie şi $g_2^{-1} = g_2$. Se verifică uşor că g_2 este omomorfism. Deci şi g_2 este automorfism. În concluzie, automoefismele lui $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sunt g_1 şi g_2.

3.2.54 Morfismele de inele sunt morfisme de grupuri între grupurile aditive ale inelelor.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\,,\ f(k) = f(1) \cdot k\,,\ (\forall)\, k \in \mathbb{Z}.$$

Dar $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1)$ şi atunci $f(1) \in \{0, 1\}$. În concluzie $f(k) = 0$ adică $f = \theta$ omomorfismul nul sau $f(k) = 1 \cdot k = f$ adică $f = 1_{\mathbb{Z}}$. Deci $End(\mathbb{Z}, +, \cdot) = \{\theta, 1_{\mathbb{Z}}\}$ şi $Aut(\mathbb{Z}, +, \cdot) = \{1_{\mathbb{Z}}\}$. Analog $End(\mathbb{Q}, +, \cdot) = \{\theta, 1_{\mathbb{Q}}\}$ şi $Aut(\mathbb{Q}, +, \cdot) = \{1_{\mathbb{Q}}\}$.

3.2.55 Avem $0 \in N(R)$ şi deci $N(R) \neq \emptyset$. Trebuie să arătăm că pentru orice $a, b \in N(R)$ avem $a - b \in N(R)$ şi pentru orice $r \in R$ şi orice $a \in N(R)$ avem $r \cdot a \in N(R)$. Dacă $a, b \in N(R)$ rezultă că există $m, n \in \mathbb{Z}_+$ astfel încât $a^m = 0$ şi $b^n = 0$. Trebuie să arătăm că există o putere k astfel încât $(a - b)^k = 0$.

Observaţie. Comutativitatea este esenţială deoarece binomul lui Newton funcţionează numai în acest caz.

$$\begin{aligned}(a-b)^k &= a^k - C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 + \ldots + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}ab^{k-1} + (-1)^k C_k^k b^k = \\ &= \sum_{p=0}^{m}(-1)^p C_k^p a^{k-p}b^p + \sum_{p=m+1}^{k}(-1)^p C_k^p a^{k-p}b^p.\end{aligned}$$

Pentru ca toţi termenii primei sume să fie zero impunem condiţia ca $k-p \geq m$ adică $p \leq k-m$. Pentru ca toţi termenii celei de-a doua sume să se anuleze datorită puterii lui b impunem condiţia ca $k-m+1 \geq n$, adică $k \geq n+m-1$. Deci pentru orice $k \geq m+n-1$ avem $(a-b)^k = 0$.

În particular, pentru $k = m+n-1$ avem

$$\begin{aligned}(a-b)^{m+n-1} &= a^{m+n-1} - C_{m+n-1}^1 a^{m+n-1}b + C_{m+n-1}^2 a^{m+n-2}b^2 + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}C_{m+n-1}^{n-1}a^m b^{n-1} + (-1)^n C_{m+n-1}^n a^{m-1}b^n + \\ &+ (-1)^{n+1}C_{m+n-1}^{n+1}a^{m-2}b^{n+1} + \ldots + (-1)^{m+n-1}b^{m+n-1} = 0.\end{aligned}$$

Din cei $m+n$ termeni ai sumei din membrul drept, în primii n (deci în cei pentru care $p \leq n-1$) apare ca factor a^m, iar în ceilalţi apare ca factor b^n. Aşadar $(a-b)^{m+n-1} = 0$ şi deci $a-b \in N(R)$.

Fie $a \in N(R)$. Rezultă că există $n \in \mathbb{Z}_+^*$ astfel încât $a^m = 0$. Din comutativitatea lui R avem pentru orice $r \in R$ că $(ra)^n = r^n \cdot a^n = r^n \cdot 0 = 0$. Deci $ra \in N(R)$.

3.2.56 $0 \in A : B$ şi deci $A : B \neq \emptyset$. Pentru fiecare $r_1, r_2 \in A : B$ trebuie să arătăm că $r_1 - r_2 \in A : B$ şi că oricare ar fi $x \in R$ şi pentru orice $r \in A : B$ avem $x \cdot r \in A : B$ şi $r \cdot x \in A : B$.

Dacă $r_1, r_2 \in A : B$, atunci pentru orice $b \in B$ avem $r_1 b, r_2 b \in A$. Prin urmare $(r_1 - r_2)b = r_1 b - r_2 b \in A$, A fiind ideal în R deci, în particular, subgrup în $(R, +)$.

Pentru orice $x \in R$ şi pentru orice $b \in B$ avem $xb, bx \in B$, B fiind ideal al lui R.

Pentru $r \in A : B$ avem

$$(xr) \cdot b = x \cdot (rb) \in A,\ (rb \in A \text{şi } A \text{ ideal în } R) \text{ respectiv } (rx) \cdot b = r \cdot (xb) \in A$$

Deci $A : B$ este ideal bilateral în R.

b) $n\mathbb{Z} : m\mathbb{Z} = \{r \in \mathbb{Z} \,|\, rm\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}\} = \{r \in \mathbb{Z} \,|\, n|rm\}$. Deoarece $n \mid rm$ rezultă că există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $rm = nx$, $m = m'd$, $n = n'd$ unde $d = (m, n)$ şi $[m, n] \cdot d = m \cdot n$. Rezultă că $r \cdot m' \cdot d = n' \cdot d \cdot x$ deci $n'|r \cdot m'; (n', m') = 1$, de unde $n'|r \Rightarrow \left.\frac{n}{d}\right| r \Rightarrow \left.\frac{[m,n]}{m}\right| r$.

În concluzie $n\mathbb{Z} : m\mathbb{Z} = \left\{ r \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{[m,n]}{m} \mid r \right\} = \frac{[m,n]}{m}\mathbb{Z}$.

3.2.57. Fie $\mathbb{Z}_m = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{m-1}\}, \mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$ şi $\mathbb{Z}_{mn} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}, \ldots, \widetilde{mn-1}\}$, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n = \{(\widehat{a}, \bar{b}) | \widehat{a} \in \mathbb{Z}_m, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n\}$. Definim funcţia $f : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, $f(\widetilde{a}) = (\widehat{a}, \bar{a})$. Să arătăm că f este bine definită şi stabileşte izomorfismul de inele căutat.

Dacă $\widetilde{a} = \widetilde{b}$, atunci $a \equiv b (\text{mod } mn)$ şi deci $mn | a-b$. Rezultă că $m|a-b$ şi $n|a-b$, adică $a \equiv b (\text{mod } m)$ şi $a \equiv b (\text{mod } n)$. Deci $\widehat{a} = \widehat{b}$ şi $\bar{a} = \bar{b}$ respectiv $(\widehat{a}, \bar{a}) = (\widehat{b}, \bar{b})$, de unde rezulă că $f(\widetilde{a}) = f(\widetilde{b})$.

$$f(\widetilde{a} + \widetilde{b}) = f(\widetilde{a+b}) = (\widehat{a+b}, \overline{a-b}) = (\widehat{a} + \widehat{b}, \bar{a} + \bar{b}) = (\widehat{a}, \bar{a}) + (\widehat{b}, \bar{b}) = f(\widetilde{a}) + f(\widetilde{b}).$$

Analog, $f(\widetilde{ab}) = f(\widetilde{a}) \cdot f(\widetilde{b})$, adică f este omomorfism de inele.

Dacă $f(\widetilde{a}) = f(\widetilde{b})$ atunci $(\widehat{a}, \bar{a}) = (\widehat{b}, \bar{b})$ şi deci $\widehat{a} = \widehat{b}$, respeciv $\bar{a} = \bar{b}$. De unde rezultă că $m|a-b$, $n|a-b$ şi deoarece $(m, n) = 1$ avem că $m \cdot n | a-b$, adică $\widetilde{a} = \widetilde{b}$. În concluzie f este surjectivă.

$|\mathbb{Z}_m| = m$, $|\mathbb{Z}_n| = n$ şi $|\mathbb{Z}_{mn}| = m \cdot n$. Deoarece $\mathbb{Z}_{mn}$ şi $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ au acelaşi număr de elemente rezultă că f este bijectivă. În concluzie $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

Observaţie. Dacă $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sunt numere întregi pozitive şi $(m_i, m_j) = 1$ pentru orice $i \neq j$ atunci inelele $\mathbb{Z}_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \simeq \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_k}$.

3.2.58. Fie aplicaţia $f : R \to R/_I \times R/_J,\ f(a) = (a + I, a + J)$. Aceasta este bine definită nedepinzând de alegerea reprezentanţilor. Ţinând seama de definiţia adunării şi înmulţirii în inele factor avem:

$$\begin{aligned} f(a+b) &= [(a+b)+I, (a+b)+J] = [(a+I)+(b+I), (a+J)+(b+J)] = \\ &= (a+I, a+J) + (b+I, b+J) = f(a) + f(b) \text{ pentru orice } a, b \in R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= (ab+I, ab+J) = [(a+I)\cdot(b+I), (a+J)\cdot(b+J)] = \\ &= (a+I, a+J)\cdot(b+I, b+J) = f(a)\cdot f(b) \text{ pentru orice } a, b \in R. \end{aligned}$$

Deci f este omomorfism de inele. Conform teoremei fundamentale de izomorfism avem că $R/_{Ker\ f} \simeq \mathrm{Im} f$.

$$\begin{aligned} Ker\ f &= \{a \in R \,|\, f(a) = (0_{R/I}, 0_{R/J})\} = \{a \in R \,|\, (a+I, a+J) = (I, J)\} = \\ &= \{a \in R \,|\, a \in I, a \in J\} = I \cap J \end{aligned}$$

Fie $b, c \in R$ astfel încât $(b + I, c + J) \in R/_I \times R/_J$. Întrucât $R = I + J$ putem scrie $b = i + j$ şi $c = i' + j'$ unde $i, i' \in I$ şi $j, j' \in J$.

Fie $a = i' + j \in R$. Avem $a + I = i' + j + I = j + I = b - i + I = b + I$ şi $a + J = i' + j + J = i' + J = c - j' + J = c + J$. Rezultă că $(a + I, a + J) = (b + I, c + J)$, adică $f(a) = (b + I, c + J)$, unde $a = i' + j$. În concluzie f este surjectivă şi $\mathrm{Im} f = R/_I \times R/_J$.

3.2.59 Fie $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ două polinoame.

$$\begin{gathered} f(P+Q) = (P+Q)(1) = P(1) + Q(1) = f(P) + f(Q) \\ f(P\cdot Q) = (P\cdot Q)(1) = P(1)\cdot Q(1) = f(P)\cdot f(Q) \end{gathered}$$

adică f este omomorfism de inele.

Surjectivitatea este evidentă.

Rezultă din teorema fundamentală de izomorfism că $\mathbb{R}[X]/_{Ker\ f} \simeq \mathbb{R}$. Avem

$$Ker\ f = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, f(P) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(1) = 0\}$$

Arătăm că $Ker\ f = (X - 1) = (X - 1)\cdot Q,\ Q \in \mathbb{R}[X]$. Pentru orice $P \in (X - 1)$ rezultă că $P = (X - 1)\cdot Q,\ Q \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = P(1) = f(X - 1)\cdot f(Q) = (1 - 1)f(Q) = 0 \Rightarrow P \in Ker\ f$ adică $(X - 1) \subseteq Ker\ f$.

Reciproc, dacă $P \in Ker\ f$ atunci $f(P) = P(1) = 0$. Dar $P \in \mathbb{R}[X]$ şi conform teoremei împărţirii cu rest rezultă că există $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $P = (X - 1)Q + R$, grad $R < 1$ adică grad $R = 0$. Rezultă că $P = (X - 1)Q + a$ şi vom avea $0 = f(P) = f(a) = a$, adică $P = (X - 1)Q$ şi deci $P \in (X - 1)$.

În concluzie $\mathbb{R}[X]/_{(X-1)} \simeq \mathbb{R}$.

3.2.60 Mulţimea idealelor este inclusă în mulţimea subinelelor inelului $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Mulţimea subinelelor lui $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este $\mathcal{S}(\mathbb{Z}, +, \cdot) = \{n\mathbb{Z} \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Să arătăm că $n\mathbb{Z}$ este ideal al lui $\mathbb{Z}$. Într-adevăr, $n\mathbb{Z}$ este subgrup în $(\mathbb{Z}, +)$ şi în plus pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ şi orice $x = na \in n\mathbb{Z}$ avem $xk = (na)\cdot k = n \cdot k' \in n\mathbb{Z}$. Prin urmare, mulţimea idealelor inelului $\mathbb{Z}$ este

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}, +, \cdot) = \{n\mathbb{Z} \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Toate idealele lui $\mathbb{Z}$ sunt ideale principale. Idealele factor ale inelului $\mathbb{Z}$ se construiesc prin factorizare cu ideale care au forma $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Plecând de la grupul cât al lui $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ şi anume $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ şi ţinând seama de operaţia de înmulţire din $\mathbb{Z}$ se poate completa şi structura lui $\mathbb{Z}_n$.

Operaţia $\widehat{x}\cdot\widehat{y} = \widehat{x\cdot y}$ sau $(x + n\mathbb{Z})(y + n\mathbb{Z}) = xy + n\mathbb{Z}$ împreună cu operaţia de adunare induc pe $n\mathbb{Z}$ o structură de inel comutativ şi unitar $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, unitatea fiind $\hat{1} = 1 + n\mathbb{Z}$.

3.2.61 Arătăm echivalenţa dintre a) şi b).

Observaţie. În general, dacă R este un inel finit cu unitate, atunci un element $r \in R$, $r \neq 0$ este inversabil dacă şi numai dacă r nu este divizor al lui zero.

Într-adevăr, fie $r \in R$ inversabil. Rezultă că există $r^{-1} \in R$ astfel încât $r \cdot r^{-1} = r^{-1} \cdot r = 1$.

Dacă există $b \in R$ astfel încât $r \cdot b = 0$ rezultă că $r^{-1} \cdot r \cdot b = r^{-1} \cdot 0 = 0$ adică $b = 0$ şi deci r nu este divizor al lui zero.

Reciproc, dacă r nu este divizor al lui zero, fie $t_r : R \to R$, $t_r(x) = rx$. Aplicaţia t_r este injectivă. Într-adevăr, $t_r(x_1) = t_r(x_2)$ implică $rx_1 = rx_2$ adică $r(x_1 - x_2) = 0$. r nefiind divizor al lui zero rezultă că $x_1 - x_2 = 0$ dacă $x_1 = x_2$. Aplicaţia t_r fiind injectivă şi R fiind inel finit rezultă că t_r este surjectivă deci bijectivă, adică există $r' \in R$ astfel încât $t_r(r') = 1$. Deci $r \cdot r' = 1$ şi $r^{-1} = r'$.

În concluzie, a) $\Leftrightarrow$ b) în orice inel finit cu unitate şi în particular, echivalenţa are loc şi în $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.

Să arătăm că b) $\Leftrightarrow$ c).

Dacă $\widehat{r}$ este element inversabil în $\mathbb{Z}_n$ atunci există $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_n$ astfel încât $\widehat{r} \cdot \widehat{a} = \widehat{1}$ sau $ra = 1 + nk$, $a, k \in \mathbb{Z}$. Deci $ra + n(-k) = 1$ ceea ce arată că r şi n sunt relativ prime.

Reciproc, dacă r, n sunt relativ prime atunci există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ru + nv = 1$ sau $ru = 1 - nv$ adică $\widehat{ru} = \widehat{1}$ sau $\widehat{r} \cdot \widehat{u} = \widehat{1}$ adică $\widehat{u}^{-1} = \widehat{r}$.

Exemplu: în $\mathbb{Z}_6$ elementele inversabile sunt $\widehat{1}$ şi $\widehat{5}$.

3.2.62 Idealele lui $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ sunt de forma $J/_{n\mathbb{Z}}$ cu proprietatea că $n\mathbb{Z} \subseteq J$ unde J este ideal în $\mathbb{Z}$, adică $J = m\mathbb{Z}$. Deci idealele lui $\mathbb{Z}_n$ sunt de forma $m\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = m \cdot \mathbb{Z}_n = (\widehat{m})$ cu proprietatea $m \,|\, n$. În $\mathbb{Z}_{21}$ avem mulţimea divizorilor lui 21, $D_{21} = \{1, 3, 7, 21\}$ deci

$I_1 = 1\mathbb{Z}/_{21\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{21}$.

$I_2 = 3\mathbb{Z}/_{21\mathbb{Z}} = (\widehat{3}) = \{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{9}, \widehat{12}, \widehat{15}, \widehat{18}\}$.

$I_3 = 7\mathbb{Z}/_{21\mathbb{Z}} = (\widehat{7}) = \{\widehat{0}, \widehat{7}, \widehat{14}\}$.

$I_4 = 21\mathbb{Z}/_{21\mathbb{Z}} = (\widehat{0}) = \{\widehat{0}\}$.

Inelele factor vor fi: $\mathbb{Z}_{21}/_{I_1} \simeq \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}}$, inelul nul

$$\mathbb{Z}_{21}/_{I_2} = \{a + I_2 \mid a \in \mathbb{Z}_{21}\} = \left\{I_2; \widehat{1} + I_2; \widehat{2} + I_2\right\} =$$

$$= \left\{\{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{9}, \widehat{12}, \widehat{15}, \widehat{18}\}, \{\widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{7}, \widehat{10}, \widehat{13}, \widehat{16}, \widehat{19}\}, \{\widehat{2}, \widehat{5}, \widehat{8}, \widehat{11}, \widehat{14}, \widehat{17}, \widehat{20}\}\right\} \simeq \mathbb{Z}_3$$

$$\mathbb{Z}_{21}/_{I_3} = \{a + I_3 \mid a \in \mathbb{Z}_{21}\} = \left\{I_3; \widehat{1} + I_3; \widehat{2} + I_3; \widehat{3} + I_3; \widehat{4} + I_3; \widehat{5} + I_3; \widehat{6} + I_3\right\} =$$

$$= \left\{\{\widehat{0}, \widehat{7}, \widehat{14}\}, \{\widehat{1}, \widehat{8}, \widehat{15}\}, \{\widehat{2}, \widehat{9}, \widehat{16}\}, \{\widehat{3}, \widehat{10}, \widehat{17}\}, \{\widehat{4}, \widehat{11}, \widehat{18}\}, \{\widehat{5}, \widehat{12}, \widehat{19}\}, \{\widehat{6}, \widehat{13}, \widehat{20}\}\right\} \simeq \mathbb{Z}_7.$$

$$\mathbb{Z}_{21}/_{I_4} = \{a + I_4 \mid a \in \mathbb{Z}_{21}\} = \left\{\{\widehat{0}\}, \{\widehat{1}\}, \{\widehat{2}\}, \{\widehat{3}\}, ..., \{\widehat{19}\}, \{\widehat{20}\}\right\} \simeq \mathbb{Z}_{21}.$$

3.2.63 Prin calcul direct, folosind proprietăţile operaţiilor cu mulţimi se arată că în raport cu diferenţa simetrică:

$$A \vartriangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A); A, B \in \mathcal{P}(M),$$

$(\mathcal{P}(M), \Delta)$ este un grup abelian, cu elementul neutru, mulţimea vidă şi opusul oricărui element, el însuşi; $(\mathcal{P}(M), \cap)$ este un nonoid comutativ cu elementul unitate, mulţimea M, iar intersecţia este distributivă faţă de diferenţa simetrică. Cum $A \cap A = A$, acest inel este inel Boole.

Fie aplicaţia $\varphi : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{Z}_2^M$ care asociază fiecărei submulţimi $A \subseteq M$, funcţia sa caracteristică f, deci $\varphi(A) = f_A : M \to \mathbb{Z}_2$ unde $f_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in M \setminus A \\ 1 & \text{dacă } x \in A \end{cases}$. Aplicaţia este bijectivă. Pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(M)$ avem $\varphi(A \vartriangle B) = f_{A \vartriangle B} : M \to \mathbb{Z}_2$ şi $f_{A \vartriangle B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in M \setminus A \vartriangle B \\ 1 & \text{dacă } x \in A \vartriangle B \end{cases}$,iar $\varphi(A) + \varphi(B) = f_A + f_B$.

Deoarece

$$(f_A + f_B)(x) = f_A(x) + f_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \notin A \text{şi } x \notin B \text{ sau } (x \in A \text{şi } x \in B) \\ 1 & \text{dacă } (x \in A \text{şi } x \notin B) \text{ sau } (x \in B \text{şi } x \notin A) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (A \cap B) \cup (M \setminus A \cup B) \\ 1 & \text{dacă } x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \end{cases} = f_{A \vartriangle B}(x),$$

rezultă $\varphi(A \triangle B) = \varphi(A) + \varphi(B)$. Avem, de asemenea, $\varphi(A) \cdot \varphi(B) = f_A \cdot f_B$.

$$\text{Cum } (f_A \cdot f_B)(x) = f_A(x) \cdot f_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in M \setminus A \cap B \\ 1 & \text{dacă } x \in A \cap B \end{cases} = f_{A \cap B}(x)$$

de aici rezultă că $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$, aceasta demonstrează izomorfismul celor două inele.

3.3 Probleme propuse

Grupuri

3.3.1 Să se arate că mulţimea $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ este un subgrup în $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dar nu în $(\mathbb{C}, +)$.

3.3.2 Marcaţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii justificând răspunsul:
1) Orice grup cu cel mult patru elemente este abelian.
2) Orice două grupuri cu patru elemente sunt izomorfe.
3) Orice element al unui grup generează un subgrup ciclic al grupului.
4) $(S_3, \circ)$ unde S_3 este grupul permutărilor de ordinul 3 este comutativ.
5) Orice subgrup al unui grup comutativ este comutativ.
6) $(\mathbb{Q}, +)$ este ciclic.
7) $(\mathbb{Z}, +)$ este ciclic.
8) $(S_3, \circ)$ este ciclic.
9) Ordinul unui subgrup al unui grup finit divide ordinul grupului.
10) Indicele unui subgrup al unui grup finit divide ordinul grupului.
11) Ordinul unui element al unui grup finit divide ordinul grupului.
12) Se poate vorbi despre cât $G/_N$ dacă şi numai dacă N este subgrup normal al grupului G.
13) Orice grup cât al unui grup finit este finit.
14) Orice grup cât al unui grup comutativ este comutativ.
15) Orice grup cât al unui grup necomutativ este necomutativ.

3.3.3 Fie $G = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right) \middle| \, a, b \in \mathbb{R}\,,\ a \neq 0 \text{ sau } b \neq 0 \right\}$. Să se arate că:
a) Mulţimea G este grup abelian relativ la înmulţirea matricilor.
b) Aplicaţia $f : \mathbb{C}^* \to G\,,\ f(a + bi) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right)$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ la grupul $(G, \cdot)$.
c)Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ există un unic subgrup de ordin n al grupului G.

Indicaţie. c) Cum $\mathbb{C}^*$ are un unic subgrup de ordinul n şi anume U_n rezultă că G are un unic subgrup de ordin n şi anume $f(U_n)$. (U_n fiind grupul rădăcinilor de ordinul n al unităţii).

3.3.4 Fie $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*\,, f(z) = |z|^2$.
a) Arătaţi că f este un omomorfism de grupuri multiplicative.
b) Determinaţi $Ker\ f$ şi $\mathrm{Im} f$. Studiaţi injectivitatea şi surjectivitatea lui f.
c) Aplicaţi prima teoremă de izomorfism.

3.3.5 Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ \ f(x + iy) = x - 2y$. Să se arate că f este morfism surjectiv de grupuri aditive şi să se determine $Ker\ f$.

3.3.6 Fie $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x * y = xy - 5x - 5y + 30$. Este $(\mathbb{R}, *)$ grup? Dar $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, *)$?

3.3.7 Fie $GL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \det A \text{ este inversabil în } (\mathbb{Z}, \cdot)\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \det A \in \{-1, 1\}\}$ şi $SL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1\}$. Să se arate că
a) $GL_n(\mathbb{Z})$ este un subgrup al lui $(GL_n(\mathbb{Q}), \cdot)$.
b) subgrupul lui $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$ generat de $\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}, +)$.
c) $SL_n(\mathbb{Z})$ este un subgrup al lui $GL_n(\mathbb{Z})$.

3.3.8 Fie $A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right)$, $B = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right)$. Să se arate că în $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$ avem $\mathrm{ord} A = 4$, $\mathrm{ord} B = 3$ şi $\mathrm{ord}(AB) = \infty$.

3.3.9 Fie $U_2 = \{-1, 1\}$ grupul rădăcinilor de ordinul 2 al unităţii. Să se arate că au loc următoarele izomorfisme de grupuri:
a) $(\mathbb{C}/_{\mathbb{R}}, +) \simeq (\mathbb{R}, +)$; b) $(\mathbb{Q}/_{U_2}, \cdot) \simeq (\mathbb{Q}^*_+, \cdot)$; c) $(\mathbb{R}^*/_{U_2}, \cdot) \simeq (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$.

Indicaţie. Se arată că funcţiile următoare sunt omomorfisme de grupuri şi se aplică prima teoremă de izomorfism

a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(a+bi) = b$; b) $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*_+$, $f(x) = |x|$; c) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*_+$, $f(x) = |x|$.

3.3.10 Fie $K = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Să se arate că $SL_n(K)$ este un subgrup normal al lui $(GL_n(K), \cdot)$. Ce se întâmplă pentru $K = \mathbb{Z}$?

Indicaţie. Se arată că $f : GL_n(K) \to K^*$, $f(A) = \det A$ şi $g : GL_n(\mathbb{Z}) \to U_2$. $g(A) = \det A$ sunt omomorfisme de grupuri şi se aplică prima teoremă de izomorfism.

3.3.11 Să se determine subgrupurile şi grupurile cât ale lui $(\mathbb{Z}_8, +)$ şi $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

3.3.12 Fie $(G, \cdot)$ un grup. Pentru fiecare $a \in G$ definim funcţia $i_a : G \to G$, $i_a(x) = a \times a^{-1}$. Să se arate că

a) i_a este un automorfism al lui G, numit automorfismul interior determinat de a.

b) Mulţimea $I(G) = \{i_a \,|\, a \in G\}$ este un subgrup normal al grupului $(Aut(G), \circ)$ al tuturor automorfismelor lui G.

c) Aplicaţia $\varphi : (G, \cdot) \to (I(G), \cdot)$, $\varphi(a) = i_a$ este un morfism surjectiv de grupuri.

d) G este abelian dacă şi numai dacă $I(G) = \{i_e\}$.

3.3.13 Fie $H_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & a \\ 0 & b \end{array} \right) \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ şi $H_2 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 2a & 3b \\ 4c & 5d \end{array} \right) \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătaţi că H_1 şi H_2 sunt subgrupuri ale grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$.

3.3.14 a) Dacă H_1 şi H_2 sunt subgrupuri ale unui grup G arătaţi că $H_1 \cap H_2$ este subgrup al lui G. Cine este subgrupul determinat de reuniunea lui H_1 şi H_2?

b) Arătaţi că pentru subgrupurile $4\mathbb{Z}$ şi $6\mathbb{Z}$ ale grupului $(\mathbb{Z}, +)$ avem $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$ şi $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$.

3.3.15 Fie $n > 1$ întreg impar şi fie $*$ operaţia definită pe $\mathbb{R}$ prin $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$. Să se arate că $(\mathbb{R}, *)$ este un grup izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$.

Indicaţie. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ este un izomorfism al lui $(\mathbb{R}, +)$ pe $(\mathbb{R}, *)$.

3.3.16 Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ mulţimea $U_n = \{x \in G \,|\, x^n = e\}$ are n elemente. Să se arate că:

a) U_n este subgrup al lui G.

b) Orice subgrup finit al lui G este un anumit U_n.

c) $U_n \subseteq U_m \Leftrightarrow n \,|\, m$.

d) $U_n \cap U_m = U_d$ unde $d = (n, m)$ c.m.m.d.c. al lui m şi n.

Inele. Corpuri.

3.3.17 Un număr $d \in \mathbb{Z}$ se numeşte întreg liber de pătrate dacă $d \neq 1$ şi d nu se divide prin pătratul nici unui număr prim.

Fie d un întreg liber de pătrate. Să se arate că:

a) $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.

b) $a, b \in \mathbb{Q}$ şi $a + b\sqrt{d} = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

c) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \left\{ a + b\sqrt{d} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ este un subinel în $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ care conţine pe 1 şi acest subinel este generat de $\left\{ 1, \sqrt{d} \right\}$.

d) $Q(\sqrt{d}) = \left\{ a + b\sqrt{d} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ este un subcorp al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi acest subcorp este generat de $\sqrt{d}$.

3.3.18 Să se determine subinelul şi subcorpul lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ generat de $\left\{ 1, \sqrt[3]{2} \right\}$.

3.3.19 a) Să se arate că mulţimea $K = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 2b & a \end{array} \right) \middle| \, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ este un subcorp al lui $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), +, \cdot)$.

b) Să se arate că corpul $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este izomorf cu corpul K.

3.3.20 Fie $A = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 5b & a \end{array} \right) \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătaţi că A este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricilor şi că formează un inel comutativ şi fără divizori ai lui zero în raport cu

operaţiile induse.

3.3.21 Fie $d \in \mathbb{Z}$ un întreg liber de pătrate şi $K = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ bd & a \end{array} \right) \middle| \; a, b \in \mathbb{Q} \right\}$. Să se arate că:

a) K este parte stabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea şi formează corp în raport cu operaţiile induse.

b) Corpurile $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), +, \cdot)$ şi $(K, +, \cdot)$ sunt izomorfe.

Indicaţie. a) Se poate arăta că K este subcorp în $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), +, \cdot)$.

3.3.22 Să se dea exemple de părţi stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu " $+$ " şi " $\cdot$ ", care nu sunt inele în raport cu operaţiile induse de " $+$ " şi " $\cdot$ ", respectiv de părţi stabile ale lui $\mathbb{C}$ în raport cu " $+$ " şi " $\cdot$ " care sunt corpuri sau inele în raport cu operaţiile induse de " $+$ " şi " $\cdot$ ". Folosind definiţia subinelului şi subcorpului să se precizeze care din exemplele date mai sus sunt subinele sau subcorpuri ale lui $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

3.3.23 Să se dea exemplu de subinel al unui inel cu unitate care nu conţine unitatea şi de subinel al unui corp care nu este subcorp.

3.3.24 Să se dea exemplu de subinel S al unui inel cu unitate, $(R, +, \cdot)$ care este, în raport cu operaţiile induse, un inel cu unitate dar unitatea sa este diferită de unitatea lui R.

Indicaţie. $S = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \; a \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Elementul unitate în S este $S = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$.

3.3.25 Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $x \perp y = ax + by - 2;\; x \top y = xy - 2x - 2y + c,\; (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine a, b, c astfel încât $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ să fie corp.

b) Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$ să stabilească un izomorfism de la $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ la $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

3.3.26 Fie R un inel şi $f : R \to \mathcal{M}_2(R),\; f(x) = \left(\begin{array}{cc} x & 0 \\ 0 & x \end{array} \right)$. Să se arate că f este morfism injectiv de inele.

3.3.27 Care dintre propoziţiile următoare sunt adevărate:

1^0. Orice subinel al unui inel comutativ este ideal.

2^0. Orice ideal al unui inel comutativ este subinel.

3^0. Dacă I este un ideal stâng sau drept al unui inel R atunci putem vorbi de un inel factor $R/_I$.

4^0. Dacă I este un subinel al unui inel R atunci putem vorbi de un inel factor $R/_I$. Justificaţi răspunsul.

3.3.28 Este intersecţia dintre un ideal stâng şi un ideal drept un ideal (bilateral)? Justificaţi răspunsul.

3.3.29 Arătaţi că mulţimile $M = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & c \end{array} \right) \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ şi $N = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$ sunt subinele cu unitate ale inelului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Sunt ele şi ideale ale acestui inel?

3.3.30 Arătaţi că $S = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array} \right) \middle| \; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ este subinel al inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Este S ideal în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ stâng? Dar drept?

3.3.31 a) Aflaţi elementele inversabile şi divizorii lui zero în inelul $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$.

b) Aflaţi idealele şi inelele cât în $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$.

3.3.32 a) Fie mulţimea $A = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right) \middle| \; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Să se arate că A este un subinel unitar al inelului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$.

b) Inelele $(A, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ sunt izomorfe.

3.3.33 Fie R un inel şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că inelul $\mathcal{M}_n(R)$ este comutativ dacă şi numai dacă

$R^2 = \{0\}$.

3.3.34 Fie $K = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & d \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \, d \in \mathbb{Z} \right\}$ şi $T_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & c \end{array} \right) \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătaţi că $T_2(\mathbb{Z})/_K \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3.3.35 Fie $\mathbb{Z}[X]$ inelul polinoamelor cu coeficienţi întregi în nedeterminata X şi $(X^2 - d)$ idealul principal generat de polinomul $X^2 - d$. Să se arate că $\mathbb{Z}(\sqrt{d}] \simeq \mathbb{Z}[X\}/_{(X^2-d)}$.

Indicaţie. Se arată că aplicaţia $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[\sqrt{d}], \; f(P) = P(\sqrt{d})$ este un omomorfism surjectiv şi se aplică teorema fundamentală de izomorfism.

3.3.36 Fie inelul polinoamelor cu coeficienţi reali în nedeterminata X şi $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}, \; f(P) = P(i)$ unde $P \in \mathbb{R}[X]$.

a) Calculaţi $Kerf$.

b) Arătaţi că $\mathbb{R}[X]/_{(X^2+1)}$ şi $\mathbb{C}$ sunt izomorfe, unde prin $(X^2 + 1)$ înţelegem idealul principal generat de polinomul $X^2 + 1$.

3.3.37 Pe intervalul $K = (0, \infty)$ definim legile de compoziţie

$$\begin{array}{l} x \perp y = xy \\ x \top y = x^{\ln y} \end{array} \quad \text{pentru orice } x, y \in K.$$

a) Arătaţi că tripletul $(K, \perp, \top)$ este corp comutativ.

b) Arătaţi că corpurile $(K, \perp, \top)$ şi $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sunt izomorfe.

Indicaţie. b) Se arată că funcţia $f : K \to \mathbb{R}, \; f(x) = \ln x$ este izomorfism de corpuri.

Bibliografie

[1] Andrica D., Duca I.D., Purdea I., Pop Ioana, *Matematică de bază*, Editura Studium, Cluj Napoca 2002

[2] Both N., Crivei S., *Culegere de probleme de algebră*, Litografia Universităţii Babeş-Bolyai, Cluj Napoca, 1997

[3] Iancu Lăcrimioara, *Culegere de probleme de algebră*, Litografia Universităţii de Nord Baia Mare, 1996

[4] Pop S. Maria, *Algebră, fascicula 1, Relaţii, Grupuri*, Litografia Universităţii de Nord Baia Mare, 2001

[5] Pop S. Maria, *Algebră, fascicula 2, Inele*, Litografia Universităţii de Nord Baia Mare, 2002

[6] Purdea I., Pelea C., *Probleme de algebră*, Editura Fundaţiei pentru Studii Europene, Cluj Napoca, 2005

[7] Purdea I., Pop Ioana, *Algebră*, Editura Gill, 2003

Partea II

Geometrie

Capitolul 1

Spaţiul vectorial al vectorilor liberi

În natură se cunosc două feluri de mărimi fizice:

a) **mărimi scalare** care sunt caracterizabile cu ajutorul unui singur număr real (de exemplu: masă, arie, volum etc.) şi

b) **mărimi vectoriale** care cer trei noţiuni pentru a le defini: o valoare numerică numită modul sau normă, o direcţie şi sens (de exemplu: deplasare, viteză, acceleraţie, forţă, etc.).

În ideea de clarificare a acestor trei caracteristici vom defini mai întâi noţiunea de segment orientat.

1.1 Segmente orientate şi vectorii liberi.

1.1.1 Definiţie. *Numim segment de dreaptă mulţimea punctelor cuprinse între două puncte ale unei drepte.*

Fie d o dreaptă şi punctele $A, B \in d$. Segmentul de dreaptă cuprins între A şi B, fără aceste două puncte se numeşte segmentul deschis AB şi se notează (AB).

$(AB) \cup \{A\} = [AB)-$se numeşte segmentul AB închis în A şi deschisă în B.

$(AB) \cup \{A, B\} = [AB]-$se numeşte segmentul închis AB.

Drumul cel mai scurt între două puncte este cel parcurs pe segmentul de dreaptă care le uneşte. Cum în orice geometrie prin două puncte diferite trece o singură dreaptă, segmentul de dreaptă care le uneşte este unic determinat. La o deplasare de la punctul A la punctul B drumul cel mai scurt este pe $[AB]$ şi este suficient să cunoaştem doar punctul de plecare A şi cel de sosire B în spaţiul euclidian real cu 3 dimensiuni, E_3.

1.1.2 Observaţie. E_1**-** dreapta, E_2- planul, E_3- spaţiul.

1.1.3 Definiţie. Numim **segment orientat** $\overline{AB}$ perechea ordonată de puncte $(A, B) \in E_3 \times E_3$, unde A este originea şi B vârful (extremitatea) segmentului orientat.

1.1.4 Definiţie. Distanţa între A şi B se numeşte **norma (modulul)** segmentului orientat $\overline{AB}$:

$$d(A, B) = AB = \parallel \overline{AB} \parallel .$$

1.1.5 Observaţie. $\parallel \overline{AB} \parallel = \parallel \overline{BA} \parallel \quad \forall (A, B) \in E_3 \times E_3$.

1.1.6 Definiţie. Spunem că $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au aceeaşi **direcţie** dacă dreptele lor de suport sunt egale sau paralele, adică

$$AB = CD \text{ sau } AB \parallel CD.$$

1.1.7 Definiţie. Două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au acelaşi **sens** dacă prin translaţia lui $\overline{CD}$ paralel cu el însuşi astfel încât C să se mute în A şi măsura unghiului $\widehat{D'AB} \leq 90°$, unde D' este translatatul lui D. În caz contrar spunem că cele două segmente orientate au sens contrar.

1.1.8 Observaţie. Dacă $C, D \in AB$, atunci alunecând segmentul orientat $\overline{CD}$ astfel încât C să se suprapună peste A şi D să se mute în D', în cazul în care $D' \in [AB$ spunem că $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au acelaşi sens.

1.1.9 Definiţie. Segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt **echipolente** dacă au aceeaşi normă, direcţie şi sens. Se notează $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

Se poate verifica uşor că relaţia de echipolenţă este o relaţie de **echivalenţă** în $E_3 \times E_3$, adică are următoarele 3 proprietăţi:
1. $(\forall)\,\overline{AB} \in E_3 \times E_3 \quad \overline{AB} \sim \overline{AB}$ (reflexivitate)
2. Dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ atunci şi $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ (simetrie)
3. $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ şi $\overline{CD} \sim \overline{EF} \Rightarrow \overline{AB} \sim \overline{EF}$ (tranzitivitate)

Relaţia de echipolenţă "$\sim$" fiind o relaţie de echivalenţă în $E_3 \times E_3$, înseamnă că mulţimea tuturor segmentelor orientate $E_3 \times E_3$ poate fi împărţită în clase de echivalenţă cu ajutorul acestei relaţii.

1.1.10 Definiţie. Numim vector liber **AB** (notat şi $\overrightarrow{AB}$) clasa de echivalenţă a segmentelor orientate echipolente cu $\overline{AB}$.

1.1.11 Definiţie. Dacă $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ (Fig. 3.1) atunci $\overline{CD} \in \mathbf{AB}$ şi se scrie

$$\mathbf{CD} = \mathbf{AB} \;\; (\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB})$$

Fig. 3. 1

1.1.12 Observaţie. În cărţi ştiinţifice vectorii liberi se notează cu litere îngroşate. Notaţia cu săgeata deasupra este practică atunci când utilizăm scrierea de mână (notiţe).

1.1.13 Definiţie. Mulţimea vectorilor liberi V_3 se numeşte **spaţiul vectorial al vectorilor liberi cu n dimensiuni**, dacă

$$\mathbf{AB} \in V_3 \;\text{ şi }\; \overline{AB} \in E_3 \times E_3.$$

Pentru $n = 1$, V_1 este mulţimea vectorilor situati pe o dreaptă, şi vectorii în acest caz se numesc vectori alunecători. V_2- vectorii din plan; V_3- vectorii din spaţiu. Vectorii cu origine fixată se numesc vectori legaţi.

În continuare vom înzestra mulţimea vectorilor liberi cu două operaţii, una internă, suma vectorială alta externă, înmulţirea unui vector cu un scalar care îi conferă o structură de spaţiu vectorial.

1.1.14 Definiţie. Numim **sumă vectorială** o lege de compoziţie internă

$$+ : V_3 \times V_3 \to V_3$$

unde pentru $\mathbf{a} \ni \overline{AB} \in V_3$ şi $\mathbf{b} \ni \overline{AC} \in V_3$ astfel încât $\mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b} \ni \overline{AD}$, unde $ABCD$ este un paralelogram din E_3.(Fig. 3.2)

Fig. 3. 2

Această metodă de însumare a 2 vectori liberi poartă numele de **metoda paralelogramului**. Ea provine din experienţa practică a compunerii a două forţe. Dacă considerăm

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} \ni \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD},$$

atunci spunem că am utilizat **metoda triunghiului** de însumare a vectorilor liberi. Metoda triunghiului se poate generaliza la mai mulţi vectori liberi considerând originea vectorilor în vârful vectorilor precedenţi şi vectorul sumă fiind vectorul cu originea în originea primului vector şi vârful în extremitatea ultimului vector (Fig. 3.3.). În acest caz avem de a face cu metoda poligonului.

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4.$$

Fig. 3. 3

1.1.15 Teoremă. $(V_3, +)$ *are structură algebrică de* ***grup abelian,*** *adică:*

a) $(\forall)\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3; \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$

b) $\exists \mathbf{0} \in V_3; \;\; (\forall)a \in V_3,\; \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a};$

c) $(\forall)\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_3 \qquad \mathbf{(a+b)+c=a+(b+c)};$

d) $(\forall)\,\mathbf{a}\in V_3,\quad (\exists)-\mathbf{a}\in V_3,\ \ \mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{0}.$

Demonstraţie.
a) Comutativitatea rezultă imediat din însăşi metoda paralelogramului;
b) Vectorul liber nul este $\mathbf{0}=\mathbf{AA}$, şi are norma egală cu 0;
c) Asociativitatea rezultă din metoda poligonului aplicată la 3 vectori liberi (Fig. 3.4)

Fig. 3.4

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}\ni(\overline{AB}+\overline{BC})+\overline{CD}=\overline{AC}+\overline{CD}=\overline{AD},$$
$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\ni\overline{AB}+(\overline{BC}+\overline{CD})=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AD}.$$

Deci $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ oricare ar fi $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in V_3$.
d) Fie $\mathbf{a}\ni\overline{AB}$, luând $-\mathbf{a}\ni\overline{BA}$ avem

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})\ni\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}=\mathbf{0},$$

$$(-\mathbf{a})+\mathbf{a}\ni\overline{BA}+\overline{AB}=\overline{BB}=\mathbf{0}.$$

Produsul unui vector cu un scalar

Această lege de compoziţie provine din adunarea repetată a vectorilor liberi. Fie $\mathbf{a}\in V_3$ şi $m\in\mathbb{N}$, atunci

$$\underbrace{\mathbf{a}+\mathbf{a}+\ldots+\mathbf{a}}_{\text{de } m \text{ ori}}=m\mathbf{a}.$$

1.1.16 Definiţie. Prin **produsul între scalarul** $k\in\mathbb{R}$ şi vectorul liber $\mathbf{a}\in V_m$ înţelegem o lege de compoziţie externă

$$\cdot:\mathbb{R}\times V_3\to V_3$$

astfel încât $(\forall)\ k\in\mathbb{R}$ şi $(\forall)\ \mathbf{a}\in V_3,\ k\mathbf{a}=\mathbf{b}\in V_3$ are următoarele proprietăţi:
a) $\|k\mathbf{a}\|=|k|\,\|\mathbf{a}\|$;
b) $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$ are aceeaşi direcţie cu $\mathbf{a}$;
c) sens $k\mathbf{a}=\begin{cases}\text{sens}\,\mathbf{a}, & \text{dacă } k>0\\ -\text{sens}\,\mathbf{a}, & \text{dacă } k<0\end{cases}$ şi $0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}$.
Se arată uşor că această operaţie are următoarele proprietăţi: $(\forall)\,k,l\in\mathbb{R}$ şi $(\forall)\,\mathbf{a},\mathbf{b}\in V_3$ avem
a_{sv}) $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$;
b_{sv}) $k\cdot(l\cdot\mathbf{a})=(k\cdot l)\cdot\mathbf{a}$;
c_{sv}) $(k+l)\cdot\mathbf{a}=(k\mathbf{a})+(l\mathbf{a})$;
d_{sv}) $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(k\mathbf{a})+(k\mathbf{b})$
Proprietăţile de mai sus definesc produsul unui vector (generalizat) cu un scalar pentru structura algebrică de **spaţiu vectorial**. Reamintesc din algebra liniară că un grup abelian $(V,+)$ este un **spaţiu vectorial peste câmpul de scalari $\boldsymbol{K}$** dacă există o lege de compoziţie externă

$$\cdot:K\times V\to V,$$

numit produsul unui vector cu un scalar cu proprietăţile $\mathrm{a}_{sv})-\mathrm{d}_{sv})$.
Prin urmare V_3 este un spaţiu vectorial peste câmpul (corpul comutativ) $\mathbb{R}$.
1.1.17 Teoremă. *Din proprietăţile produsului unui vector liber cu un scalar rezultă următoarele proprietăţi derivate:* $(\forall)\ k,l\in\mathbb{R}$ *şi* $(\forall)\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in V_3$ avem

1.) $k\cdot\mathbf{0}=0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}$;

2.) $-1\cdot\mathbf{a}=-\mathbf{a}$;

3.) $-(k\mathbf{a})=(-k)\mathbf{a}=k(-\mathbf{a})$;

4.) $(k-l)\mathbf{a}=(k\mathbf{a})-(l\mathbf{a})$;

5.) $k(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) - (k\mathbf{b})$.

Demonstraţie. 1.) $k \cdot \mathbf{0} = k[\mathbf{0} + \mathbf{0}] = k \cdot \mathbf{0} + k \cdot \mathbf{0}$. Notând cu $\mathbf{x} = k\mathbf{0}$, avem $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ şi $0 \cdot \mathbf{a} = (0 + 0)\mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{a}$, notând cu $\mathbf{y} = 0 \cdot \mathbf{a}$, rezultă $\mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

2.) Din 1.) rezultă $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{a} = [1 + (-1)\mathbf{a}] = (1 \cdot \mathbf{a}) + [(-1)\mathbf{a}] = \mathbf{a} + [(-1)\mathbf{a}]$ care ne arată că

$$(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}\,, \ \ (\forall)\ \mathbf{a} \in V_3$$

3.) Din proprietatea b_{sv}) avem

$$(-k)\mathbf{a} = [(-1) \cdot k]\mathbf{a} = (-1) \cdot (k\mathbf{a}) = -(k\mathbf{a})$$

şi

$$k(-\mathbf{a}) = k[(-1)\mathbf{a}] = [k \cdot (-1)]\mathbf{a} = (-k)\mathbf{a}.$$

4.) Din c_{sv}) şi 3.) rezultă

$$(k - l)\mathbf{a} = [k + (-l)]\mathbf{a} = (k\mathbf{a}) + [(-l)\mathbf{a}] = k\mathbf{a} + (-l\mathbf{a}) = (k\mathbf{a}) - (l\mathbf{a}).$$

5. Din d_{sv}) şi relaţia 3.) avem

$$k(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = k(\mathbf{a} + (-\mathbf{b})] = (k\mathbf{a}) + [k \cdot (-\mathbf{b})] = (k\mathbf{a}) + (-k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) - (k\mathbf{b}).$$

1.2 Repere carteziene

Proiecţia unui vector liber pe o axă

1.2.1 Definiţie. Un vector liber cu norma 1 se numeşte **vector unitate** sau **versor**.

1.2.2 Definiţie. O dreaptă pe care s-a fixat un punct 0 numit origine, orientată în aceeaşi direcţie şi sens cu ale unui versor dat $\mathbf{u}$, se numeşte **axă**.

Un plan este determinat de o dreaptă şi un punct exterior acesteia, deci întotdeauna are sens să vorbim despre dreapta perpendiculară dusă din punctul respectiv pe dreapta dată. Piciorul A' al perpendicularei duse din punctul A pe dreapta d adică intersecţia perpendicularei respective cu dreapta d, se numeşte **proiecţie ortogonală** a punctului A pe dreapta d.

1.2.3 Definiţie. Prin **vectorul proiecţie** al vectorului liber $\mathbf{v}$ pe axa $0x$ înţelegem acel vector liber care este reprezentat prin segmentul orientat $\overline{A'B'}$, unde A' şi B' sunt proiecţiile ortogonale pe axa $0x$ a originii A, respectiv a vârfului B, dacă $\overline{AB} \in \mathbf{v}$ (Fig. 3.5).

Fig. 3. 5

1.2.4 Definiţie. Prin **proiecţia ortogonală a lui v pe u**, notată prin $pr_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ se înţelege scalarul

$$pr_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{A'B'}\|\,, \text{ dacă sens } \mathbf{A'B'} = \text{sens } \mathbf{u}; \\ -\|\mathbf{A'B'}\|\,, \text{ dacă sens } \mathbf{A'B'} = -\text{sens } \mathbf{u}. \end{cases}$$

şi reprezintă măsura algebrică a segmentului $\overline{A'B'} = x_B - x_A$, unde x_A şi x_B sunt abscisele punctelor A' şi B' pe axa $0x$. Din Fig. 3. 5 se poate vedea că

$$pr_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha,$$

unde $\alpha = m(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$ este măsura unghiului dintre vectorii $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$.

1.2.5 Definiţie. Vectorul de proiecţie al vectorului liber $\mathbf{v}$ pe direcţia versorului $\mathbf{u}$ este vectorul

$$(pr_{\mathbf{u}}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$$

1.2.6 Proprietăţi. 1.) Proiecţia ortogonală a sumei de vectori liberi este egală cu suma proiecţiilor vectorilor (Fig. 3.6)

2.) $pr_{\mathbf{u}}(k\mathbf{v}) = k \cdot pr_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, $(\forall)\, k \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)\, \mathbf{v} \in V_3$ (Fig. 3.7).

Demonstraţie. 1.)

Fig. 3.6

$pr_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = x_3 - x_1$
$pr_{\mathbf{u}}\mathbf{v}_1 + pr_{\mathbf{u}}\mathbf{v}_2 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = x_3 - x_1 = pr_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$.

Prin inducţie matematică rezultă că această proprietate este aplicabilă şi la suma mai multor vectori liberi.

2.)

Fig. 3.7

Fie $\alpha = m(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$, $pr_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cos\alpha = \|\mathbf{AB}\| \cos\alpha$.
Dacă $k \geq 0$, $pr_{\mathbf{u}}(k\mathbf{v}) = \|k\mathbf{AB}\| \cos\alpha = |k| \cdot \|\mathbf{AB}\| \cos\alpha = pr_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$;
Dacă $k < 0$ $pr_{\mathbf{u}}(k\mathbf{v}) = \|k\mathbf{AB}\| \cos\alpha = |k| \cdot \|\mathbf{AB}\| \cos\alpha = pr_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$.

Reprezentarea vectorilor liberi din plan

Fie un punct $M \in E_2$ şi fie **reperul ortonormat** $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ al spaţiului vectorial V_2 al vectorilor liberi din planul E_2, unde 0 reprezintă originea axelor **ortogonale** de coordonate $0x$ şi $0y$, iar $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{j}$ sunt versorii acestor axe. Dacă $\mathbf{v} \ni 0M$ este vectorul de poziţie al punctului $M \in E_2$, atunci spunem că $x = pr_{\mathbf{i}}\mathbf{v}$ este **abscisa** şi $y = pr_{\mathbf{j}}\mathbf{v}$ **ordonata** punctului M. Perechea ordonată de numere $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ poartă numele de **coordonate carteziene** ale punctului M în baza $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Denumirea acestor coordonate provine de la numele omului de ştiinţă francez Descartes (1596-1650) care a pus bazele geometriei analitice şi al cărui nume latinizat fusese Cartesius.

Fig. 3.8

Din Fig. 3.8 se observă că aplicând regula paralelogramului avem

$$\mathbf{0A}+\mathbf{0B}=\mathbf{0M},$$

adică

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

unde $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ este **baza ortonormată** canonică a spaţiului vectorial V_2.

Cuvântul ortonormat este compus din cuvintele ortogonal = perpendicular şi normat deoarece $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$ şi $\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = 1$.

Norma (modulul) vectorului $\mathbf{v}$ reprezintă distanţa $0M$, care după teorema lui Pitagora este egală cu

$$\|\,\mathbf{v}\| = \|\,\mathbf{0M}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Fig. 3.9

Din Fig. 3.9 se observă că

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0B} - \mathbf{0A} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j},$$

deci distanţa AB, ca şi norma vectorului $\mathbf{AB}$, va fi egală cu

$$d(A, B) = AB = \|\,\mathbf{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Reprezentarea vectorilor liberi din spaţiu

Să considerăm acum un punct M din spaţiul euclidian cu 3 dimensiuni, E_3. **Reperul ortonormat canonic** al spaţiului vectorial V_3 este $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ unde $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ şi $\mathbf{k}$ sunt versorii axelor de coordonate $0x, 0y$ şi $0z$. În acest caz, în locul unui dreptunghi cu diagonala $\mathbf{0M}$ se construieşte un paralelipiped dreptunghic cu diagonala $\mathbf{0M}$ ca în Fig. 3.10.

Fig. 3.10

Observăm că
$$\mathbf{v} = \mathbf{0M} = \mathbf{0N} + \mathbf{0C} = \mathbf{0A} + \mathbf{0B} + \mathbf{0C} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
şi
$$\|\mathbf{v}\| = d(0M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$
Distanţa între punctele $A(x_A, y_A, z_A)$ şi $B(x_B, y_B, z_B)$ este
$$d(A, B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2},$$
iar **AB** se poate exprima sub forma
$$\mathbf{AB} = \mathbf{0B} - \mathbf{0A} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}.$$

1.3 Produse de vectori

Produsul scalar a doi vectori liberi

În algebra liniară produsul scalar al vectorilor dintr-un spaţiu vectorial V peste câmpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe se defineşte astfel:

1.3.1 Definiţie. Fie un spaţiu vectorial V peste câmpul $\mathbb{C}$. Prin produsul scalar a doi vectori din V înţelegem o aplicaţie
$$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$$
$(\forall)$ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $(\exists)$ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{C}$ astfel încât pentru $(\forall)$ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ şi $(\forall)$ $k \in \mathbb{C}$ să aibă loc:

1.) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \overline{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)}$, unde $\overline{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)}$ este conjugatul numărului complex $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$;

2.) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$;

3.) $k(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (k\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$;

4.) $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \geq 0$; $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = 0$.

1.3.2 Definiţie. Un spaţiu vectorial cu un produs scalar se numeşte **spaţiu vectorial euclidian**.

1.3.3 Observaţie. Dacă scalarii sunt reali, atunci proprietatea 1. 3. 1. 1.) devine
$$1^{'}.) \quad (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1).$$

1.3.4 Teoremă. *Legea de compoziţie*
$$\cdot : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R},$$
$(\forall)$ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_3$, $(\exists)$ $k = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}$ *astfel încât*
$$k = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot pr_{\mathbf{v}_1} \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_2\| \cdot pr_{\mathbf{v}_2} \mathbf{v}_1 \tag{1.3.1}$$
defineşte în spaţiul real al vectorilor liberi $3-$*dimensional* V_3 *un produs scalar.*

Demonstraţie. Fie $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V_3$ şi $(\forall)$ $k \in \mathbb{R}$ şi $\alpha = m(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

1.) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cos\alpha = \|\mathbf{v}_2\| \cdot \|\mathbf{v}_1\| \cos(-\alpha) = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1$;

2.) $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot pr_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot (pr_{\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_2 + pr_{\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_3)$
$= \|\mathbf{v}_1\| \cdot pr_{\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_2 + \|\mathbf{v}_1\| \cdot pr_{\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3)$;

3.) $k(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = k \cdot (\|\mathbf{v}_2\| \cdot pr_{\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_1) = (k \cdot pr_{\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_1)\|\mathbf{v}_1\| = [pr_{\mathbf{v}_2}(k\mathbf{v}_1)] \cdot \|\mathbf{v}_2\| = \mathbf{v}_2 \cdot (k\mathbf{v}_1) = (k\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2$;

4.) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_1\| \cos 0 = \|\mathbf{v}_1\|^2 \geq 0$ şi $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \|\mathbf{v}_1\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{v}_1\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

Ultima proprietate ne spune că pătratul unui vector (în sensul produsului scalar) este egal cu pătratul normei sale
$$\mathbf{v}^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \ , \quad (\forall)\ \mathbf{v} \in V_3. \tag{1.3.2}$$

Din cele 4 proprietăţi care definesc un produs scalar aplicate la spaţiul vectorial euclidian real al vectorilor liberi 3−dimensionali V_3 rezultă şi alte proprietăţi.

1.3.5 Teoremă *Fie spaţiul vectorial al vectorilor liberi* 3−*dimensionali* V_3 *înzestrat cu produsul scalar definit prin formula* (1.3.1). *Pentru orice* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V_3$ şi $(\forall)$ $k \in \mathbb{R}$ *au loc următoarele relaţii:*

a) $\mathbf{v}_1(k\mathbf{v}_2) = k(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$;

b) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3)$;

c) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$;

d) $(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2 \leq \mathbf{v}_1^2 \cdot \mathbf{v}_2^2$-inegalitatea Cauchy-Buniacovski-Schwarz

Demonstraţie. a) $\mathbf{v}_1(k\mathbf{v}_2) \overset{1.)}{=} (k\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_1 \overset{3.)}{=} k(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1) \overset{1.)}{=} k(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$;

b) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 \overset{1.)}{=} \mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \overset{2.)}{=} (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1) + (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2) \overset{1.)}{=} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3)$;

c) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{0}+\mathbf{0}) \overset{2.)}{=} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0}) + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0})$. Notând cu $l = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0} \in \mathbb{R}$, rezultă $l = l + l$ de unde obţinem

$$l = 0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0} \overset{1.)}{=} \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_1;$$

d) Dacă $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, atunci $0 = 0$ şi proprietatea este adevărată.

Fie $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ şi scalarul $k = \dfrac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}$. Atunci $(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - k(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2) = 0$, adică $(\mathbf{v}_1 - k\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Din 1.3.1.4.) rezultă că

$$(\mathbf{v}_1 - k\mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - k\mathbf{v}_2) \geq 0$$

sau

$$[(\mathbf{v}_1 - k\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1] - k[(\mathbf{v}_1 - k\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2] \geq 0,$$

care pentru orice k ales devine $(\mathbf{v}_1 - k\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1 \geq 0$ sau $(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - \dfrac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \cdot (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1) \geq 0$. Cum $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 > 0$, rezultă

$$(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2) \geq (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2.$$

1.3.6 Observaţie. Proprietăţile din teorema 1.3.5 sunt adevărate în orice spaţiu vectorial euclidian. Inegalitatea Cauchy-Buniacovski-Schwarz se poate scrie şi sub forma

$$|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2| \leq \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|,$$

adică

$$\frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|} \leq 1 \quad \text{pentru orice } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_3 - \{\mathbf{0}\}.$$

Putem defini unghiul a doi vectori liberi 3−dimensionali nenuli unghiul $\alpha = m(\widehat{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2})$ unde

$$\cos\alpha = \frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}, \quad \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0} \ \text{ şi } \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0},$$

care justifică formula (1.3.1).

Din formula (1.3.2) putem calcula norma unui vector:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}. \tag{1.3.3}$$

1.3.7 Definiţie. Spunem că doi vectori nenuli ai unui spaţiu vectorial euclidian real V sunt **ortogonali** dacă produsul lor scalar este egal cu 0 :

$$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0},\ \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0},\ \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0.$$

1.3.8 Observaţie. $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2 \quad \text{sau } \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \text{ sau } \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}\}$

1.3.9 Definiţie. Numim **versor** (**vector unitate**) al unui vector dat $\mathbf{v} \in V_3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ vectorul

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\| \mathbf{v}\|}.$$

Această definiţie se justifică prin faptul că

$$\| \mathbf{u}\| = \left\| \frac{\mathbf{v}}{\| \mathbf{v}\|} \right\| = \frac{\| v\|}{\| v\|} = 1,$$

iar sensul şi direcţia lui $\mathbf{u}$ coincid cu cele ale lui $\mathbf{v}$ deoarece scalarul $\dfrac{1}{\| \mathbf{v}\|}$ este strict pozitiv.

Dacă baza B nu este ortonormată atunci expresia produsului scalar devine o formă biliniară simetrică, exprimată cu ajutorul tensorilor.

În cazul vectorilor liberi din plan, cu baza ortonormaă $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, unde $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$ avem

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Pentru vectorii liberi din spaţiul V_3, cu baza ortonormată $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ şi $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ avem

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Aplicând formula (1.3.3) pentru un vector 3−dimenional scris în baza ortonormată $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ se obţine formula de calcul pentru **norma** vectorului $\mathbf{a} \in V_3$, adică

$$\| \mathbf{a}\| = \|a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.3.4}$$

Fie acum două puncte A şi B din spaţiul euclidian E_3 cu n dimensiuni. Dacă pentru spaţiul vectorial V_3 al vectorilor liberi din E_3 alegem ca bază baza ortonormată $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, proiecţiile vectorilor de poziţie $\mathbf{0A} = \mathbf{a}$ şi $\mathbf{0B} = \mathbf{b}$ în reperul $(0, B)$ vor fi coordonatele carteziene ale celor două puncte $A(a_x, a_y, a_z)$ şi $B(b_x, b_y, b_z)$ şi

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0B} - \mathbf{0A} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_x - a_x)\mathbf{i} + (b_y - a_y)\mathbf{j} + (b_z - a_z)\mathbf{k}. \tag{1.3.5}$$

Ţinând seamă de formulele (1.3.4) şi (1.3.5) obţinem pentru distanţa între punctele A şi B formula

$$d(A, B) = AB = \| \mathbf{AB}\| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}.$$

Pentru unghiul α dintre vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ avem:
în plan, V_2

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}},$$

în spaţiu, V_3

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

1.3.11 Teorema lui Pitagora în V_3. Fie vectorii $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_3$, $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$. Are loc relaţia

$$(\mathbf{b} - \mathbf{c})^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2.$$

Demonstraţie.

$$(\mathbf{b} - \mathbf{c})^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{b}^2 - \mathbf{bc} - \mathbf{cb} + \mathbf{c}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$

(Fig.3.11)

Fig. 3.11

Notând cu $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$, vectorul $\mathbf{BC}$ al ipotenuzei, rezultă

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2,$$

adică

$$\| \mathbf{a}\|^2 = \| \mathbf{b}\|^2 + \| \mathbf{c}\|^2 .$$

Produsul vectorial a doi vectori liberi din V_3

1.3.12 Definiţie. Prin produsul vectorial a vectorilor liberi $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$ din spaţiul V_3, se înţelege o lege de compoziţie internă a spaţiului vectorial V_3 :

$$\times : V_3 \times V_3 \to V_3\,,\ (\forall)\,\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_3\,,\ (\exists)\ \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \in V_3,$$

unde

$$\| \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| = \| \mathbf{v}_1\| \cdot \| \mathbf{v}_2\| \cdot |\sin\alpha|\ ,\quad \alpha = m(\widehat{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2})$$

sensul lui $\mathbf{v}$ este dat de regula burghiului, adică este sensul de avansare a burghiului când se roteşte de la vectorul $\mathbf{v}_1$ spre $\mathbf{v}_2$.

În natură, momentul unei forţe este un exemplu potrivit pentru produsul vectorial între vectorul forţei şi braţul forţei.

Fig. 3.12

Pentru interpretarea geometrică a normei $\| \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|$ să observăm că aria triunghiului $0AB$ din Fig. 3.12 este egală cu $\frac{1}{2}\| \mathbf{v}_1\| \cdot \| \mathbf{v}_2\| \cdot |\sin\alpha|$, şi deci

$$\| \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| = \mathcal{A}_{\Box\, 0ABC}.$$

1.3.13 Proprietăţi.

1. $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1$; $(\forall)\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_3$;
2. $k(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = k(\mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \times (k\mathbf{v}_2)$; $(\forall)\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_3$,şi $(\forall)\, k \in \mathbb{R}$;
3. $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)$; $(\forall)\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V_3$;
4. $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\mathbf{v}_1$şi $\mathbf{v}_2$ au aceeaşi direcţie sau $\mathbf{v}_1 = 0$ sau $\mathbf{v}_2 = 0\}$

Demonstraţie. 1. Sensul de mişcare a burghiului când se roteşte de la $\mathbf{v}_2$ la $\mathbf{v}_1$ este invers sensului de deplasare a acestuia când se roteşte de la $\mathbf{v}_1$ la $\mathbf{v}_2$.

4. $\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi$. Cum $\sin 0 = \sin\pi = 0$, rezultă că $\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_1\| \times \|\mathbf{v}_2\| \cdot 0 = 0$, deci $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0$.

Pentru demonstraţia proprietăţilor 2 şi 3 să determinăm formula de calcul a produsului vectorial când vectorii sunt exprimaţi în baza canonică $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \times (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}).$$

Fig. 3.13

Cum $\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = \|\mathbf{k}\| = 1$ şi $\mathbf{i} \perp \mathbf{j} \perp \mathbf{k} \perp \mathbf{i}$ şi $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, din Fig. 3.13 se observă că $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ etc. şi rezultă următoarea tablă de operaţie

$\times$	**i**	**j**	**k**
i	0	**k**	**-j**
i	**-k**	0	**i**
k	**j**	**-i**	0

Obţinem

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = x_1 y_2 \mathbf{k} - x_1 z_2 \mathbf{j} - y_1 x_2 \mathbf{k} + y_1 z_2 \mathbf{i} + z_2 x_2 \mathbf{j} - z_1 y_2 \mathbf{i},$$

adică

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

2.

$$k(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = k(x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \times (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) = k \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ kx_1 & ky_1 & kz_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (k\mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ kx_2 & ky_2 & kz_2 \end{vmatrix} = \mathbf{v}_1 \times (k\mathbf{v}_2).$$

3.

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 & z_2 + z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3).$$

Produsul mixt a trei vectori liberi din V_3

1.3.14 Definiţie. Scalarul $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \in \mathbb{R}$ unde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V_3$ se numeşte produsul mixt al vectorilor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ şi $\mathbf{v}_3$. Cum

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

unde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ din determinant se înlocuiesc cu x_1, y_1 şi z_1. Astfel

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \cdot [(x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) \times (x_3 \mathbf{i} + y_3 \mathbf{j} + z_3 \mathbf{k})] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Din proprietăţile determinanţilor rezultă că produsul mixt este invariant la o permutare circulară a vectorilor

1. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$,

iar prin schimbarea între ei a doi vectori în produsul mixt se schimbă semnul acestuia.

2. $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) = -(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Pentru interpretarea geometrică a produsului mixt, fie Fig. 3.14.

Fig. 3.14

$$|\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)| = |\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)| = |\|(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)\| \cdot pr_{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3} \mathbf{v}_1| = \mathcal{A}_{0ADB} \cdot \left|0C'\right| =$$

$$= \text{Volumul paralelipipedului cu muchiile } \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \text{ şi } \mathbf{v}_3.$$

1.3.15 Observaţie. Vectorii coplanari au produsul mixt egal cu 0.

Dublul produs vectorial a trei vectori

1.3.16 Definiţie. Prin **dublu produs vectorial** al vectorilor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_3$ înţelegem

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \in V_3.$$

1.3.19 Teoremă. *Dublul produs vectorial al vectorilor* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_3$ *se poate calcula mai uşor cu ajutorul formulei lui Gibbs:*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix}.$$

Demonstraţia formulei se face exprimând cele două expresii în baza ortonormată $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Capitolul 2

Elemente de geometrie analitică liniară

2.1 Reprezentările analitice ale dreptei în plan şi în spaţiu. Ecuaţia planului.

2.1.1. Dreapta determinată de un punct şi de un vector director

În V_3 alegem pentru exprimarea vectorilor reperul ortonormat $(0, B) = (0, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$. Fie M_0 un punct de coordonate carteziene (x_0, y_0, z_0) şi un vector $\mathbf{v} \in V_3$ de coordonate (l, m, p). Se cer ecuaţiile dreptei paralele cu vectorul $\mathbf{v}$ care trece prin punctul M_0 (Fig. 3.15)

Fig. 3.15

Se ia un punct mobil $M(x, y, z)$ pe dreapta (d). Cum $\mathbf{v} \parallel (d)$, rezultă că există un scalar $t \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathbf{M_0M} = t\mathbf{v},$$

adică

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = t(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + p\mathbf{k}).$$

Rezultă **forma parametrică a ecuaţiilor dreptei** (d):

$$(\mathbf{d}) : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tp, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

unde $t \in \mathbb{R}$ se numeşte **parametru**.

Ecuaţia (2.1.1) are şi o interpretare geometrică. Dacă t reprezintă timpul şi $\mathbf{v}$ este viteza punctului M pe dreapta (d), atunci ecuaţia (2.1.1) permite determinarea poziţiei punctului M faţă de punctul iniţial M_0 pentru fiecare moment de timp $t \in \mathbb{R}$. Când $t = 0$, atunci $M = M_0$.

Se obişnuieşte să se scrie ecuaţiile dreptei (d) şi sub forma unui şir de rapoarte egale, **ecuaţiile carteziene**:

$$(d) : \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{2.1.2}$$

cu precizarea că dacă în ecuaţiile (2.1.2) vreunul din numitori este nul, atunci şi numărătorul corespunzător este (prin convenţie) nul. În planul E_2, pentru reprezentarea unei drepte, avem ecuaţiile

$$(d) : \quad \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q},$$

unde $M(x, y)$, $M_0(x_0, y_0)$ şi $\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j}$.

2.1.2 Dreapta determinată de două puncte

Fie $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ două puncte din E_3. În acest caz vom lua $M_0 = M_1$ şi vectorul director $\mathbf{v} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$. Din (2.1.2) rezultă

$$(M_1M_2): \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} - \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{2.1.3}$$

În plan se obţine:

$$(M_1M_2): \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{2.1.4}$$

cu $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$.

2.1.3 Observaţie. Dacă vectorul director $\mathbf{v}$ are norma 1, atunci

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = \cos(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{i}}), \ \ \mathbf{v}\cdot\mathbf{j} = \cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{j}}\right), \ \ \mathbf{c}\cdot\mathbf{k} = \cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{k}}\right)$$

iar numitorii ecuaţiilor (2.1.2) se numesc **cosinuşii directori** ai dreptei (d).

2.1.4 Dreapta din plan

Să considerăm dreapta (M_1M_2) dată de ecuaţia (2.1.4). Dacă efectuăm toate calculele trecând toţi termenii în membrul stâng se arată uşor că ecuaţia obţinută este echivalentă cu ecuaţia

$$(M_1M_2): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Notând cu

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left\|\overline{M_1M_2}\right\| \cdot \cos(\widehat{d,\mathbf{j}})}{\left\|\overline{M_1M_2}\right\| \cdot \cos(\widehat{d,\mathbf{i}})} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$$

panta (**coeficientul unghiular**) al dreptei (d). Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M_1(x_1, y_1)$ şi are panta m este:

$$(d): y - y_1 = m(x - x_1). \tag{2.1.5}$$

O dreaptă paralelă cu axa $0x$ are ecuaţia

$$y = y_0,$$

iar una paralelă cu $0y$:

$$x = x_0.$$

Din ecuaţia (2.1.5) obţinem

$$y = mx + (y_1 - mx_1).$$

Notând cu $n = y_1 - mx_1$ obţinem ecuaţia dreptei când se cunoaşte panta m a acesteia şi ordonata sa n la origine:

$$(d): y = mx + n. \tag{2.1.6}$$

Condiţia ca dreapta (d) să treacă prin originea 0 a axelor de coordonate este ca $n = 0$.

Să observăm că ecuaţia (2.1.6) cuprinde toate dreptele posibile din plan cu excepţia celor verticale. Ecuaţia unei drepte se poate scrie sub forma

$$(d): Ax + By + C = 0,$$

numită **ecuaţia generală a dreptei**.

Dacă $A = 0$, atunci $(d) \parallel 0x$.

Dacă $B = 0$, atunci $(d) \parallel 0y$.

Dacă $C = 0$, atunci $0 \in (d)$.

Presupunem că $B \neq 0$, atunci $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$, deci $m = -\dfrac{A}{B}$ şi $n = -\dfrac{C}{B}$.

Dacă considerăm punctele $A(a, 0)$ şi $B(0, b)$ (Fig. 3.16)

Fig. 3.16

se obţine **ecuaţia dreptei prin tăieturi**:

$$(d) : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

2.1.5 Planul determinat de un punct şi un vector normal

Fig. 3.17

Să considerăm planul (P), punctul $M_0 \in (P)$ şi vectorul $\mathbf{n} \perp (P)$ (Fig.3.17). Un punct mobil descrie planul (P) dacă $M_0M \subset (P)$. Avem astfel condiţia ca

$$\mathbf{n} \perp \mathbf{M_0M},$$

adică

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{M_0M} = 0.$$

Dacă $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi $M(x, y, z)$, atunci

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{M_0M} = (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k})[(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0.$$

Se obţine ecuaţia planului determinat de un punct M_0 şi vectorul normal $\mathbf{n}$:

$$(P) : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2.1.7)$$

2.1.6 Ecuaţia generală a planului

Efectuând calculele în formula (2.1.7) obţinem ecuaţia generală a planului

$$(P) : Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Cazuri particulare:

$$\begin{array}{lll} \text{dacă } A = 0 & \text{atunci} & (P) \parallel 0x \\ \text{dacă } B = 0 & \text{atunci} & (P) \parallel 0y \\ \text{dacă } C = 0 & \text{atunci} & (P) \parallel 0z \\ \text{dacă } D = 0 & \text{atunci} & 0 \in (P). \end{array}$$

2.1.7 Planul determinat de trei puncte

Să considerăm un plan (P) şi punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi $M_3(x_3, y_3, z_3)$ situate în planul (P). Fie un punct mobil $M(x, y, z) \in (P)$ (Fig.3.18).

Fig. 3.18

Vectorii $\mathbf{MM_1}, \mathbf{MM_2}$ şi $\mathbf{MM_3}$ fiind coplanari, rezultă că produsul lor mixt este egal cu 0. Deci

$$(\mathbf{MM_1}, \mathbf{MM_2}, \mathbf{MM_3}) = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

Completând acest determinant cu linia $(x, y, z, 1)$ şi cu coloana $(1, 0, 0, 0)$ şi adunând această linie la cele trei linii se obţine ecuaţia planului $(P) = (M_1M_2M_3)$ scrisă sub forma:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Considerând punctele planului (P) situate pe cele trei axe de coordonate: $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ obţinem ecuaţia planului prin tăieturi

$$(P) : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + +\frac{z}{c} - 1 = 0. \qquad (3.43)$$

Avem astfel o posibilitate pentru reprezentarea planului (P) în spaţiu (Fig.3.19).

Fig. 3.19

2.2 Poziţiile relative ale punctelor, dreptelor şi planelor din spaţiu

2.2.1 Intersecţia a două drepte din plan

Să considerăm două drepte (d) şi $(d^{'})$ din plan. Prin intersecţia lor se înţelege mulţimea punctelor lor comune, adică soluţia sistemului de ecuaţii formate din ecuaţiile celor două drepte

$$\begin{array}{l}(d): Ax + By + C = 0;\\ (d^{'}): A^{'}x + B^{'}y + C^{'} = 0.\end{array}$$

Notând cu $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ A^{'} & B^{'} \end{vmatrix}$, pentru existenţa soluţiei unice trebuie ca $\Delta \neq 0$, adică

$$AB^{'} - BA^{'} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{A}{A^{'}} \neq \frac{B}{B^{'}}.$$

Dacă $\Delta = 0$, adică $\frac{A}{A^{'}} = \frac{B}{B^{'}}$ sau $-\frac{A}{B} = -\frac{A^{'}}{B^{'}}$ care conform definiţiei implică $m = m^{'}$. În acest caz avem două situaţii:

1. Dacă $\frac{A}{A^{'}} = \frac{B}{B^{'}} = \frac{C}{C^{'}}$ – drepte confundate (sistem compatibil nedeterminat)
2. Dacă $\frac{A}{A^{'}} = \frac{B}{B^{'}} \neq \frac{C}{C^{'}}$ – drepte paralele (sistem incompatibil).

Dreptele sunt perpendiculare dacă

$$m = -\frac{1}{m^{'}} \Leftrightarrow m \cdot m^{'} = -1.$$

Unghiul θ cuprins între cele două drepte se poate determina cu ajutorul formulei

$$\mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}(\alpha - \alpha^{'}) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha^{'}}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\alpha^{'}} = \frac{m - m^{'}}{1 + mm^{'}}.$$

2.2.2 Intersecţia a trei plane

Fie acum trei plane $(P), (P^{'})$ şi $(P^{''})$. Sistemul format din ecuaţiile acestora are ca soluţie coordonatele punctelor lor comune:

$$\begin{cases}(P): Ax + By + Cz + D = 0;\\ (P^{'}): A^{'}x + B^{'}y + C^{'}z + D^{'} = 0;\\ (P^{''}): A^{''}x + B^{''}y + C^{''}z + D^{''} = 0.\end{cases}$$

Pentru

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A^{'} & B^{'} & C^{'} \\ A^{''} & B^{''} & C^{''} \end{vmatrix} \neq 0$$

sistemul este compatibil determinat, şi cele trei plane se intersectează într-un singur punct. Dacă n plane au un singur punct comun, atunci sistemul format din n ecuaţii cu 3 necunoscute este compatibil determinat. Dacă $\Delta = 0$, atunci rangul sistemului este mai mic ca 3 şi sistemul este nedeterminat: fie compatibil (rangul matricii extinse este egal cu rangul sistemului), fie incompatibil (când rangul matricii extinse este mai mare ca rangul sistemului) conform teoremei lui Kronecker-Capelli.

2.2.3 Unghiul a două plane

Prin unghiul diedru al celor două plane

$$\begin{array}{l}(P): Ax + By + Cz + D = 0;\\ (P^{'}): A^{'}x + B^{'}y + C^{'}z + D^{'} = 0\end{array}$$

vom înţelege unghiul format de dreptele perpendiculare pe latura comună celor două plane care sunt situate respectiv în cele două plane. Unghiul vectorilor lor directori este egal cu unghiul vectorilor normali la cele două plane

$$\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k};$$
$$\mathbf{n}^{'} = A^{'}\mathbf{i} + B^{'}\mathbf{j} + C^{'}\mathbf{k},$$

deci

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}^{'}}{\|\,\mathbf{n}\|\cdot\|\,\mathbf{n}'\|} = \frac{AA^{'} + BB^{'} + CC^{'}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A^{/2}+B^{'2}+C^{'2}}}.$$

2.2.4 Unghiul a două drepte din spaţiu

Fie dreptele (d) şi $(d^{'})$ din spaţiu:

$$(d): \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}, \text{ şi } (d^{'}): \frac{x-x_0^{'}}{p^{'}} = \frac{y-y_0^{'}}{q^{'}} = \frac{z-z_0^{'}}{r^{'}}.$$

Vectorii lor directori sunt $\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ şi $\mathbf{v}^{'} = p^{'}\mathbf{i} + q^{'}\mathbf{j} + r^{'}\mathbf{k}$. Unghiul celor două drepte este unghiul celor doi vectori directori

$$\cos(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{v}'}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{\|\,\mathbf{v}\|\cdot\|\,\mathbf{v}'\|} = \frac{pp'+qq'+rr'}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cdot\sqrt{p^{/2}+q^{/2}+r^{/2}}}.$$

2.2.5 Unghiul format de o dreaptă şi un plan

Fig. 3.20

Fie un plan

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0$$

şi o dreaptă

$$(d): \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Prin unghiul între dreapta (d) şi planul (P) se înţelege unghiul α dintre dreapta (d) şi proiecţia ei (d') din planul (P) (Fig. 3.20). Unghiul β între vectorul director $\mathbf{v}$ al dreptei (d) şi vectorul normal $\mathbf{n}$ al planului (P) este egal cu $\frac{\pi}{2} - \alpha$, deci

$$\cos\beta = \sin\alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\| \mathbf{v}\| \cdot \| \mathbf{n}\|} = \frac{Ap + Bq + Cr}{\sqrt{p^2 + q^2 r^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.2.6 Definiţie. Numim **fascicul de plane paralele** mulţimea tuturor planelor paralele cu un plan (P) dat

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0$$

adică

$$(F): Ax + By + Cz + \lambda = 0\,, \quad (\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.2.7 Definiţie. Numim **fascicul de plane propriu-zis** mulţimea tuturor planelor care conţin aceeaşi dreaptă (d)

Fig. 3.21

Fie două plane de bază

$$(P_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$(P_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

care se intersectează după dreapta (d). Mulţimea planelor

$$(F): \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,\ (\forall)\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

reprezintă ecuaţia fasciculei de plane determinată de cele două plane (P_1) şi (P_2). Pentru parametrul $\lambda_2 = 0$ avem planul (P_1) şi pentru parametrul $\lambda_1 = 0$ planul (P_2). Coordonatele punctelor lor comune situate pe dreapta (d) verifică ecuaţiile celor două plane şi implicit ecuaţia fasciculei (F).

Dacă $\lambda_1 \neq 0$, putem împărţi ecuaţia lui (F) cu λ, şi notând cu $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ obţinem pentru fasciculul de plane ecuaţia

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,\ (\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.3 Distanţa de la un punct la o dreaptă şi de la un punct la un plan. Distanţa dintre două plane din spaţiu.

2.3.1 Distanţa de la un punct la un plan
Să considerăm un plan

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0$$

şi un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Dacă $M_0 \in (P)$ atunci distanţa $d = d(M_0, (P)) = 0$. Fie $M_0 \notin (P)$ şi un punct $M_1(x_1, y_1, z_1) \in (P)$ (Fig. 3.22)

Fig. 3.22

Vectorul $\mathbf{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\mathbf{i} + (y_0 - y_1)\mathbf{j} + (z_0 - z_1)\mathbf{k}$ are ca proiecţie după vectorul normal la planul (P)

$$\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$$

$$pr_{\mathbf{n}}\mathbf{M_1M_0} = NM_0 = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{M_1M_0}}{\|\,\mathbf{n}\|} = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Cum $M_1(x_1, y_1, z_1) \in (P)$ rezultă că $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ şi deci $NM_0 = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Distanţa de la $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul (P) este egală cu $|NM_0|$, adică

$$d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.3.2 Distanţa de la un punct la o dreaptă din plan

Fie în planul $x0y$ punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi o dreaptă $(d) : Ax + By + C = 0$. Analog cu distanţa de la un punct M_0 la planul (P) avem

$$d(M_0, (d)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

unde vectorul normal la dreaptă este $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ şi $\mathbf{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\mathbf{i} + (y_0 - y_1)\mathbf{j}$.

2.3.3 Distanţa de la un punct la o dreaptă din spaţiu

Fie o dreaptă $(d) : \dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r}$ determinată de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorul director $\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ şi un punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (Fig. 3.23)

Fig. 3.23

Aria paralelogramului determinat de vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{M_0M_1}$ este egală cu

$$\mathcal{A} = \|\mathbf{v} \times \mathbf{M_0M_1}\| = \|\mathbf{v}\| \cdot d$$

şi deci

$$d = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{M_0M_1}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

2.3.4 Distanţa între două drepte din spaţiu

Fie dreptele

$$(d_1) : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1}$$
$$(d_2) : \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}$$

determinate respectiv de punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi vectorii directori $\mathbf{v}_1 = p_1\mathbf{i} + q_1\mathbf{j} + r_1\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = p_2\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + r_2\mathbf{k}$.

Dacă $(d_1) \cap (d_2) \neq \emptyset$, atunci distanţa între cele două drepte este egală cu 0. Fie cazul în care $(d_1) \cap (d_2) = \emptyset$ (fig.3.24).

Fig 3.24

Din interpretarea geometrică a produsului mixt a trei vectori ca fiind volumul paralelipipedului determinat de cei trei vectori, rezultă că

$$V = |(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)|\,.$$

Acest volum este egal şi cu aria bazei (a paralelogramului determinat de vectorii $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$ ori înălţimea d a paralelipipedului

$$V = \| \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| \cdot d.$$

Egalând cele două volume, obţinem distanţa dreptelor (d_1) şi (d_2):

$$d = \frac{|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)|}{\| \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|}.$$

Capitolul 3

Conice

3.1 Definiţia conicelor. Conice studiate pe ecuaţiile lor reduse

3.1.1 Definiţia algebrică. Se numeşte **conică** o curbă de gradul al doilea, adică o curbă plană care are ca ecuaţie în coordonate carteziene o ecuaţie de gradul al doilea:

$$(K): \ F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{3.1.1}$$

unde $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

3.1.2 Definiţia geometrică. Se numeşte **conică** curba de secţiune a unei suprafeţe conice de rotaţie (C) cu un plan (P). Dacă vârful V al suprafeţei conice (C) nu se găseşte în planul (P) atunci, în funcţie de unghiul de înclinare faţă de axa suprafeţei conice avem de-a face cu **conice nedegenerate**: cerc, elipsă, parabolă, hiperbolă. Dacă $V \in (P)$ atunci curba de secţiune va fi o **conică degenerată**: un punct, două drepte secante, două drepte confundate. Dacă vârful V este aruncat la infinit, atunci suprafaţa conică de rotaţie devine o suprafaţă cilindrică de rotaţie. Un plan (P) paralel cu axa de rotaţie intersectează suprafaţa cilindrică după o **conică degenerată**: două drepte paralele, două drepte confundate sau $\emptyset$.

3.1.3 Definiţie (ca loc geometric). Se numeşte **conică nedegenerată** locul geometric al punctelor din plan ale căror raport al distanţelor la un punct F numit **focar** şi la o dreaptă (d) care nu trece prin punctul F, numită **directoare**, este constant. Acest raport se numeşte **excentricitatea** conicii şi se notează cu e.

Pentru determinarea **ecuaţiei polare** a unei conice cu polul în focarul F să considerăm (Fig. 3.25.)

Fig. 3.25

Pentru o conică trebuie ca

$$e = \frac{MF}{MN}.$$

Cum $MF = \rho$ şi $MN = FD - FM' = \Delta - \rho\cos\theta$, rezultă

$$e = \frac{\rho}{\Delta - \rho\cos\theta},$$

care după un calcul uşor devine

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

Aceasta este **ecuaţia conicei** (C) **în coordonate polare**, cu polul în focarul F, iar

$$p = e\Delta$$

se numeşte **parametrul** conicei.

Conicele nedegenerate, după excentricitatea e, se clasifică astfel:

$e = 0$	cerc
$e \in (0,1)$	eclipsă
$e = 1$	parabolă
$e \in (1, \infty)$	hiperbolă

3.1.4 Definiţie. Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix se numeşte **cerc** (Fig.3.26)

Fig. 3.26

Ecuaţia cercului cu centrul în $\omega(a, b)$ de rază R este

$$C(\omega, R) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

sau

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p = 0, \text{ cu } R^2 = a^2 + b^2 - p.$$

Cercul cu centrul în origine are ecuaţia

$$C(0, R) : x^2 + y^2 = R^2.$$

3.1.5 Definiţie. Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de două puncte fixe F şi $F^{'}$, numite focare se numeşte **elipsă** (Fig. 3.27).

Fig. 3.27

Ecuaţia elipsei raportată la axele sale de simetrie este

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ cu } c^2 = a^2 - b^2,$$

unde $e = \dfrac{c}{a}$; $p = a(1 - e^2)$ şi ecuaţiile directoarelor sunt $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$.

3.1.6 Definiţie. Locul geometric al punctelor din plan ale căror modul al diferenţei distanţelor la două puncte fixe, F şi $F^{'}$ este constant, se numeşte **hiperbolă** (Fig.3.28). Ecuaţia hiperbolei (H) raportată la axele de simetrie, având ca axă $0x$ axa focarelor este

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ cu } c^2 = a^2 + b^2.$$

Hiperbola $(H^{'})$ care are aceleaşi semiaxe ca şi (H) dar cu axa focarelor axa $0y$, se numeşte **conjugata hiperbolei** (H).

$$(H^{'}) : -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ cu } c^2 = a^2 + b^2.$$

Hiperbolele (H) şi $(H^{'})$ au aceleaşi **asimptote** $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Fig. 3.28

Hiperbola (H) are directoarele $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$, şi $(H^{'})$ pe $y = \pm\dfrac{b^2}{c}$. Excentricitatea lui (H) este

$$e = \frac{c}{a} \text{ şi parametrul } p = a(e^2 - 1)$$

iar hiperbola conjugată $(H^{'})$

$$e = \frac{c}{b} \text{ şi parametrul } p = b(e^2 - 1).$$

Să observăm că cercul, elipsa şi hiperbola au un **centru** de simetrie unic **determinat**.

3.1.7 Definiţie. Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit focar, şi de o dreaptă fixă, numită directoare, se numeşte **parabolă** (Fig.3.29).

Fig. 3.29

Ecuaţia parabolei raportată la axa de simetrie şi tangenta la vârf este

$$(P) : y^2 = 2px.$$

Directoarea (d) are ecuaţia

$$(d) : x = -\frac{p}{2}.$$

Să observăm că parabola **nu are centru de simetrie**.

3.2 Reducerea conicelor date prin ecuaţia generală la forma canonică

Reamintim ecuaţia generală a unei conice (K). Se numeşte **conică** o curbă de gradul al doilea, adică o curbă plană care are ca ecuaţie în coordonate carteziene o ecuaţie de gradul al doilea:

$$(K): \ F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$$F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Să observăm că această ecuaţie este compusă dintr-o formă pătratică

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

o formă liniară

$$g(x, y) = 2a_{13}x + 2a_{23}y$$

şi o constantă a_{33}. Adică

$$f(x, y) = F(x, y) + g(x, y) + a_{33} = 0.$$

Pe de altă parte, dacă notăm forma pătratică

$$G(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2,$$

observăm că $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cu $G(x, y, 1) = f(x, y)$. Notăm cu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matricea formei pătratice f şi cu

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matricea lui G. Putem calcula **invarianţii metrici** (invarian ţi faţă de o izometrie)

$$\delta = \det A\,; \ \ \Delta = \det \widetilde{A} \ \text{ şi } I = a_{11} + a_{22}$$

(vezi, de exemplu [3]).

Să presupunem că conica (K) are centru de simetrie $0'(a, b)$. Să translatăm axele de coordonate astfel încât originea 0 să se mute în $0'$, transformând astfel reperul $x0y$ în $x'0'y'$ (Fig. 3.30).

Fig. 3.30

Conform Figurii 3.30 $\mathbf{0M} = \mathbf{00}^{'} + \mathbf{0}^{'}\mathbf{M}$, care exprimat în coordonate carteziene devine

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) + (x^{'}\mathbf{i} + y^{'}\mathbf{j}),$$

sau pe componente

$$\begin{cases} x = a + x^{'} \\ y = b + y^{'}. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Aceasta reprezintă formulele care exprimă translaţia cerută. Matriceal se poate scrie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix},$$

care este de forma

$$X = X^{'} + D,$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\ X^{'} = \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Aplicând formulele de translaţie (3.1.2) la ecuaţia conicei (3.1.1) obţinem

$$f(x^{'}, y^{'}) = F(x^{'}, y^{'}) + (2a_{11}a + 2a_{12}b + 2a_{13})x^{'} + (2a_{12}a + 2a_{22}b + 2a_{23})y^{'} + f(a, b) = 0.$$

Vom determina noua origine $0^{'}(a, b)$ impunând ca termenii de gradul I în $x^{'}$ şi $y^{'}$ să se anuleze

$$\begin{cases} 2a_{11}a + 2a_{12}b + 2a_{13} = 0 \\ 2a_{12}a + 2a_{22}b + 2a_{23} = 0, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

sau

$$\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b = -a_{13}; \\ a_{12}a + a_{22}b = -a_{23}. \end{cases}$$

3.2.1 Observaţie. Sistemul (3.1.3) este acelaşi cu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

cu soluţia $x = a$, $y = b$.

Sistemul (3.1.3) are soluţie unică (compatibil determinat) dacă

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Deci dacă $\delta \neq 0$, conica are **centru unic**.

Dacă însă $\delta = 0$, atunci conica **nu are centru unic**, fie că sistemul este compatibil nedeterminat, fie că este incompatibil.

După translaţia de vector $\mathbf{00}^{'}$, matricea formei pătratice G devine

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f(a, b) \end{pmatrix}.$$

Cum $\Delta = \det \widetilde{A}$ este invariant metric, rezultă că

$$\Delta = \det \widetilde{A} = \delta \cdot f(a, b)$$

şi deci

$$f(a,b)=\frac{\Delta}{\delta}.$$

3.2.2 Conice cu centru unic

În acest caz $\delta\neq 0$ şi după **translaţia** de vector $\mathbf{00'}$, obţinem ecuaţia

$$f(x^{'},y^{'})=F(x^{'},y^{'})+\frac{\Delta}{\delta}=a_{11}x^{'2}+2a_{12}x^{'}y^{'}+a_{22}y^{'2}+\frac{\Delta}{\delta}=0. \tag{3.1.4}$$

În vederea determinării celei mai simple ecuaţii canonice vom trece la o rotaţie a reperului $x^{'}0^{'}y^{'}$ cu un unghi α în jurul originii $0^{'}$. Pentru identificarea noilor axe $0^{'}x^{''}$ şi $0^{'}y^{''}$ vom determina **versorii** $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$ ai acestor axe folosind **metoda valorilor şi vectorilor proprii**.

Valorile proprii λ_1 şi λ_2 sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-I\lambda+\delta=0,$$

unde $I=a_{11}+a_{22}$.

Vectorii proprii corespunzători valorilor proprii λ_1 şi λ_2 se obţin din **sistemul caracteristic**

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x+a_{12}y=0\\ a_{12}x+(a_{22}-\lambda)y=0\end{cases}$$

aplicat pe rând valorilor proprii λ_1 şi λ_2. Sistemele obţinute sunt compatibile şi nedeterminate.

Pentru λ_1 se obţin vectorii proprii

$$\mathbf{v}_1=(x_1,y_1)=(\alpha x_1^*,\alpha y_1^*)=\alpha(x_1^*,y_1^*)=\alpha\mathbf{u}_1$$

şi

$$\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}=\left(\frac{x_1^*}{\sqrt{x_1^*+y_1^*}},\frac{y_1^*}{\sqrt{x_1^*+y_1^*}}\right)=(c_1,d_1).$$

Pentru λ_2 avem

$$\mathbf{v}_2=(x_2,y_2)=(\beta x_2^*,\beta y_2^*)=\beta(x_2^*,y_2^*)=\beta\mathbf{u}_2$$

şi

$$\mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}=\left(\frac{x_2^*}{\sqrt{x_2^*+y_2^*}},\frac{y_2^*}{\sqrt{x_2^*+y_2^*}}\right)=(c_2,d_2).$$

Formula matriceală a rotaţiei este dată de

$$X'=CX'', \tag{3.1.5}$$

sau

$$\begin{pmatrix}x^{'}\\ y^{'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ d_1 & d_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{''}\\ y^{''}\end{pmatrix}.$$

Transformarea (3.1.5) este rotaţie dacă

$$\det C=\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}=1.$$

Dacă $\det C=-1$, atunci vom lua $\mathbf{e}_2=(-c_2,-d_2)$ şi $\det C$ devine egal cu 1. Unghiul de rotaţie se determină din formula

$$\cos\alpha=c_1.$$

Când unghiul α se determină greu, vom lua în planul $x^{'}0^{'}y^{'}$ punctele $P(x_1^*, y_1^*)$, $Q(x_2^*, y_2^*)$,iar dreptele $0^{'}P$, $0^{'}Q$ vor fi axele $0^{'}x^{''}$ şi $0^{'}y^{''}$.

Scriind (3.1.5) sub forma

$$\begin{cases} x^{'} = c_1 x^{''} + c_2 y^{''}, \\ y^{'} = d_1 x^{''} + d_2 y^{''}, \end{cases}$$

şi înlocuind $x^{'}, y^{'}$ în (3.1.4) se obţine

$$f(x^{''}, y^{''}) = \lambda_1 x^{''\,2} + \lambda_2 y^{''\,2} + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

care înmulţită cu $\left(-\dfrac{\delta}{\Delta}\right)$ va reprezenta ecuaţia canonică a conicei cu centrul de simetrie în $0^{'}$, raportată la reperul $x^{''}0'y^{''}$.

Dacă $\Delta = 0$, conica va fi **degenerată** şi în acest caz vom evita translaţia şi rotaţia, deoarece există o altă metodă pentru reprezentarea grafică a conicei.

3.2.3 Conice nedegenerate fără centru de simetrie (parabole)

Dacă $\delta = 0$ şi $\Delta \neq 0$, vom avea de-a face cu o parabolă. Parabola neavând centru de simetrie va trebui să facem mai întâi o **rotaţie** a reperului $x0y$ în jurul originii, folosind metoda valorilor şi vectorilor proprii, determinând noua bază

$$B^{'} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$$

şi valorile proprii λ_1 şi λ_2 din ecuaţia caracteristică, care în acest caz are forma

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - I\lambda = 0.$$

Deci $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{e}_1 = (c_1, d_1)$ şi $\lambda_2 = I$, $\mathbf{e}_2 = (c_2, d_2)$.

Aplicând rotaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}$$

sub forma

$$\begin{cases} x = c_1 x^{'} + c_2 y^{'}, \\ y = d_1 x^{'} + d_2 y^{'}, \end{cases}$$

la ecuaţia conicei (3.1.1) obţinem

$$f(x^{'}, y^{'}) = \lambda_1 x^{'\,2} + \lambda_2 y^{'\,2} + 2a_{13}(c_1 x^{'} + c_2 y^{'}) + 2a_{23}(d_1 x^{'} + d_2 y^{'}) + a_{33} = 0,$$

adică

$$f(x^{'}, y^{'}) = I y^{'\,2} + (2a_{13}c_1 x^{'} + 2a_{13}c_2 y^{'}) + (2a_{23}d_1 x^{'} + 2a_{23}d_2 y^{'}) + a_{33} = 0,$$

care este de forma

$$f(x^{'}, y^{'}) = I y^{'\,2} + 2a_{13}^{'} x^{'} + 2a_{23}^{'} y^{'} + a_{33} = 0. \tag{3.1.6}$$

După acest moment vom trece la o translaţie de vector $\mathbf{00}^{'}$, a reperului $x^{'}0y^{'}$ în reperul $x^{''}0^{'}y^{''}$, unde $0^{'}(a, b)$ este noua origine cu $x^{'} = a$ şi $y^{'} = b$. Translaţia se realizează prin formulele

$$\begin{cases} x^{'} = a + x^{''} \\ y^{'} = b + y^{''} \end{cases}$$

şi (3.1.6) devine

$$f(x^{''}, y^{''}) = I y^{''\,2} + 2a_{13}^{'} x^{''} + (2bI + 2a_{23}^{'}) y^{''} + (Ib^2 + 2a_{13}^{'} a + 2a_{23}^{'} b + a_{33}) = 0.$$

Egalând termenii din paranteze cu 0

$$\begin{cases} 2bI + 2a_{23}^{'} = 0 \\ Ib^2 + 2a_{13}^{'}a + 2a_{23}^{'}b + a_{33} = 0, \end{cases}$$

obţinem un sistem de ecuaţii din care vom putea determina coordonatele noii origini $0^{'}$.

În final, se obţine ecuaţia canonică a parabolei

$$Iy^{''2} + 2a_{13}^{'}x^{''} = 0,$$

sau

$$y^{''2} = -2\frac{a_{13}^{'}}{I}x^{''},$$

de forma $y^{''2} = 2px^{''}$ cu $p = -\frac{a_{13}^{'}}{I}$.

3.2.4 Conice degenerate

După determinarea matricilor A, $\widetilde{A}$ şi a invarianţilor matricei δ, Δ, I, dacă $\Delta = 0$ avem de-a face cu o canonică degenerată. În acest caz ordonăm ecuaţia (3.1.1) după una din necunoscute, de exemplu după y:

$$a_{22}y^2 + 2(a_{12}x + a_{23})y + (a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}) = 0$$

şi calculăm soluţiile y_1 şi y_2 ale ecuaţiei. Discriminantul ecuaţiei, Δ_y, va fi:

a) un pătrat perfect şi ecuaţia se descompune în două ecuaţii de gradul I (două drepte);

b) de forma $-(E(x))^2$, care are soluţie reală când $E(x) = 0$ şi se obţine un punct;

c) un număr constant negativ, în acest caz conica va fi mulţimea vidă.

3.2.5 Observaţie. Pentru o documentare mai detaliată se recomandă studierea bibliografiei.

Capitolul 4

Probleme de geometrie

4.1 Enunţuri

Vectori liberi

4.1.1 În triunghiul ABC, pe latura (AB) alegem punctele E şi F astfel că $3AF = 2AE = AB$, iar pe latura (AC) considerăm punctele G şi H astfel ca $2AH = 3AG = AC$. Fie $FH \cap EG = \{T\}$. Demonstraţi că: $\mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \mathbf{5AT}$.

4.1.2 Fie AB, CD două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O. Atunci:

$$\mathbf{MA} + \mathbf{MB} + \mathbf{MC} + \mathbf{MD} = 2\mathbf{MO}.$$

4.1.3 Fie punctul $A(2, -3)$ şi vectorul $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Să se afle ecuaţia unei drepte care trece prin punctul A şi este:

a) paralelă cu $\mathbf{u}$;

b) perpendiculară pe $\mathbf{u}$.

4.1.4 Fie punctele $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$, $C(4, 5)$. Fie M, mijlocul laturii (BC) iar G centrul de greutate al triunghiului ABC. Determinaţi vectorii $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{AM}$, $\mathbf{GM}$ şi apoi aflaţi perimetrul triunghiului ABC.

Dreapta şi planul în spaţiu

4.1.5 Să se studieze poziţia dreptei de ecuaţie :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{6},$$

faţă de planul de ecuaţie: $-4x - 9y + 8z - 1 = 0$.

4.1.6 Să se afle distanţa dintre dreptele paralele:

$$(d_1) : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3} \text{ şi } (d_2) : \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{3}.$$

4.1.7 Aflaţi unghiul dintre dreptele de ecuaţii:

$$(d_1) : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \text{ şi } (d_2) : \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

4.1.8 Să se deducă ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor de ecuaţii:

$$(d_1): \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1} \text{ şi } (d_2): \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{4}.$$

4.1.9 Să se aducă la forma canonică ecuaţiile dreptei:

$$(d): \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - 6y + 3z - 3 = 0. \end{cases}.$$

4.1.10 Să se determine parametrul λ real astfel ca planele:

$$\begin{array}{l} (\pi_1): x + y + 2z - 1 = 0; \\ (\pi_2): 2x - 2y - 3z + 1 = 0; \\ (\pi_3): \ 4x + 4y + 8z - \lambda = 0 \end{array}$$

să se intersecteze după o dreaptă.

4.1.11 Scrieţi ecuaţia unui plan care este definit de punctele $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(4, 4, 6)$ şi care este paralel cu vectorul $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

4.1.12 Scrieţi ecuaţia planului care trece prin punctele: $A(1, -1, 1)$, $B(0, 1, 2), C(3, 2, 4)$.

4.1.13 Să se calculeze distanţa dintre planele de ecuaţii:

$$(\pi_1): \ 2x - 7y + 5z - 12 = 0 \text{ şi } (\pi_2): \ 2x - 7y + 5z + 3 = 0.$$

4.1.14 Să se scrie ecuaţiile unei drepte care trece prin punctul $A(2, 1, 3)$ şi este paralelă cu dreapta:

$$(d): \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - 3y + 2z + 2 = 0 \end{cases}.$$

4.1.15 Să se afle proiecţia punctului $M_1(-1, 2, -2)$ pe planul de ecuaţie:

$$(\pi): \ 3x + 4y - 7z + 1 = 0.$$

4.1.16 Să se afle distanţa de la punctul $M(2, 1, -3)$ la dreapta de ecuaţie:

$$(d): \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

4.1.17 Să se găsească proiecţia dreptei (d) :

$$\begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 3x + 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

pe planul de ecuaţie:

$$(\pi): 3x + 5y - 6z + 10 = 0.$$

4.1.18 Stabiliţi care este poziţia relativă a dreptei de ecuaţie

$$(d) \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

faţă de planul $(\pi): x + 2y - 1 = 0$.

4.1.19 Un mobil se află la momentul $t = 0$ în punctul $M(2, -1, -3)$. El se deplasează rectiliniu şi uniform cu viteza dată de vectorul $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Aflaţi poziţia mobilului la momentul t precum şi ecuaţiile parametrice ale traiectoriei.

4.1.20 Să se arate că dreptele

$$(d_1): \frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4} \text{ şi } (d_2): \frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}$$

sunt concurente şi să se afle ecuaţia planului determinat de cele două drepte.

Conice

4.1.21 Să se reducă la forma canonică conica

$$f(x,y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$$

şi să se reprezinte grafic în reperul iniţial, precizând şi formulele de translaţie şi de rotaţie aplicate.

4.1.22 Să se afle ecuaţia canonică a conicei

$$f(x,y) = 9x^2 - 6xy + y^2 - 2x + 4y = 0$$

şi să se reprezinte grafic în reperul $x0y$.

4.1.23 Să se reprezinte grafic conica de ecuaţie

$$f(x,y) = 3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 1 = 0.$$

4.1.24 Să se reprezinte grafic conica de ecuaţie

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0.$$

4.2 Soluţii

Vectori liberi

4.2.1

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC} = \frac{1}{3} \text{ iar } \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow FG \parallel BC \text{ şi } EH \parallel BC.$$

De aici, obţinem:

$$\frac{FT}{TH} = \frac{FG}{EH} = \frac{BC}{3} \cdot \frac{2}{BC} = \frac{2}{3}.$$

Din triunghiul AFH, avem:

$$\mathbf{AT} = \frac{3\mathbf{AF} + 2\mathbf{AH}}{5} = \frac{\mathbf{AB} + \mathbf{AC}}{5} \Rightarrow \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = 5\mathbf{AT}.$$

4.2.2

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{MA} = \mathbf{MO} + \mathbf{OA} \\ \mathbf{MB} = \mathbf{MO} + \mathbf{OB} \\ \mathbf{MC} = \mathbf{MO} + \mathbf{OC} \\ \mathbf{MD} = \mathbf{MO} + \mathbf{OD} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{MA} + \mathbf{MB} + \mathbf{MC} + \mathbf{MD} = 4\mathbf{MO} + \mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} + \mathbf{OD}$$

Fie E şi F proiecţiile punctului O pe laturile AB şi CD. Avem

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{OA}+\mathbf{OB}=2\mathbf{OE}\\ \mathbf{OC}+\mathbf{OD}=2\mathbf{OF}\\ \mathbf{OE}+\mathbf{OF}=\mathbf{OM}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{OA}+\mathbf{OB}+\mathbf{OC}+\mathbf{OD}=2(\mathbf{OE}+\mathbf{OF})=2\mathbf{OM}=-2\mathbf{MO}$$

De aici obţinem: $\mathbf{MA}+\mathbf{MB}+\mathbf{MC}+\mathbf{MD}=4\mathbf{MO}-2\mathbf{MO}=2\mathbf{MO}$.

4.2.3 a) Ecuaţia unei drepte de vector director $\mathbf{d}(l,m)$ care trece printr-un punct $A(a,b)$ şi este paralelă cu $\mathbf{u}$, se scrie:

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}\Rightarrow\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-4}\Rightarrow$$

ecuaţia dreptei va fi: $4x+3y+1=0$.

b) Fie $\mathbf{v}(\alpha,\beta)$, astfel ca

$$\mathbf{v}\perp\mathbf{u}\Rightarrow\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=0\Rightarrow\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=3\alpha-4\beta=0\Rightarrow\alpha=\frac{4}{3}\beta.$$

Apoi înlocuind pe α în ecuaţia

$$\frac{x-2}{\alpha}=\frac{y+3}{\beta},$$

obţinem:

$$\frac{x-2}{\frac{4}{3}\beta}=\frac{y+3}{\beta}\Rightarrow x-2=\frac{4}{3}y+4c$$

şi de aici avem ecuaţia: $3x-4y-18=0$.

4.2.4 Calculăm:

$$\begin{array}{l}\mathbf{AB}=(3-(-1))\,\mathbf{i}+(-1-2)\mathbf{j}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j},\\ \mathbf{BC}=(4-3)\mathbf{i}+(5-(-1))\mathbf{j}=\mathbf{i}+6\mathbf{j},\\ \mathbf{AC}=5\mathbf{i}+3\mathbf{j}\end{array}$$

$$M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)\Rightarrow M\left(\frac{7}{2},2\right).$$

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)\Rightarrow G\left(2,2\right),$$

apoi calculăm:

$$\mathbf{AM}=\frac{9}{2}\mathbf{i},\quad \mathbf{GM}=\frac{3}{2}\mathbf{i}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\|\mathbf{AB}\|=\sqrt{16+9}=5\\ \|\mathbf{BC}\|=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}\\ \|\mathbf{AC}\|=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

perimetrul triunghiului va fi: $P_{\Delta ABC}=5+\sqrt{34}+\sqrt{37}$.

Dreapta şi planul în spaţiu

4.2.5 Observăm că vectorul director al dreptei este $\mathbf{d}(3,4,6)$, iar vectorul normal la plan are componentele $\mathbf{n}(-4,-9,8)$. Studiem produsul scalar

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{d}=l\cdot A+m\cdot M+n\cdot C=3\cdot(-4)+4\cdot(-9)+6\cdot 8=0.$$

Rezultă $\mathbf{n}\perp\mathbf{d}$, deci planul este paralel cu dreapta.

4.2.6 Observăm că cele 2 drepte au acelaşi vector director de coordonate $(3,2,3)$. Calculăm distanţa de la un punct M_1 situat pe dreapta (d_1) cu vectorul de poziţie: $\mathbf{r}_1=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ la a doua dreaptă (d_2) unde avem un punct M_2 cu vectorul de poziţie $\mathbf{r}_2=-\mathbf{i}+4\mathbf{j}+0\mathbf{k}$. Calculăm : $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2=3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+\mathbf{k}$, apoi :

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -17\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 21\mathbf{k}.$$

Obţinem în final că distanţa este $d = \dfrac{\|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{d}\|}{\|\mathbf{d}\|} = \dfrac{\sqrt{333}}{\sqrt{11}}$.

4.2.7 Calculăm vectorii directori ai celor două drepte:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{k}, \mathbf{d}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

Găsim: $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2}{\|\mathbf{d}_1\| \cdot \|\mathbf{d}_2\|} = \dfrac{12}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{18}} = \dfrac{1}{2}$ deci unghiul va fi $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

4.2.8 Ştim că pentru două drepte date prin ecuaţie generală:

$$(d_1) : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

şi $(d_2) : \dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$, ecuaţiile perpendicularei comune sunt:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ m_1 n_2 - m_2 n_1 & n_1 l_2 & l_1 m_2 - l_2 m_1 \end{vmatrix} = 0$$

şi

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ m_1 n_2 - m_2 n_1 & n_1 l_2 - n_2 l_1 & l_1 m_2 - l_2 m_1 \end{vmatrix} = 0$$

Deci, avem: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - 1 & z - 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 11 & -1 & -11 \end{vmatrix} = 0$ şi $\begin{vmatrix} x - 4 & y - 3 & z \\ 3 & -1 & 4 \\ 11 & -11 & -11 \end{vmatrix} = 0$ După calcule se obţin ecuaţiile:

$$-4x + y - 5z + 12 = 0 \text{şi } 5x + 7y - 2z - 41 = 0.$$

4.2.9 Intersectând cele două plane care determină ecuaţia dreptei (d) cu axa Oz, obţinem acelaşi punct şi anume $M(0, 0, 1)$. Vectorul director al dreptei va fi $\mathbf{d} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$, deci ecuaţia dreptei va fi: $(d) : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-7} = \dfrac{z - 1}{-16}$.

4.2.10 Din ecuaţiile celor trei plane formăm un sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 2x - 2y - 3z + 1 = 0 \\ 4x + 4y + 8z - \lambda = 0, \end{cases}$$

care trebuie să fie un sistem compatibil determinat. Considerăm matricea sistemului de mai sus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $\det(A) = 0$, deci considerăm un determinant de ordin doi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

acesta fiind luat ca determinant principal. Impunem condiţia ca determinantul caracteristic corespunzător să fie nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

şi din această condiţie obţinem: $\lambda = 4$.

4.2.11 Formăm vectorul $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = (4-1)\mathbf{i} + (4-2)\mathbf{j} + (6-3)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Vectorul normal la plan este: $\mathbf{n} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \times \mathbf{v}$, adică

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

Ecuaţia planului este: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$, unde A, B, C sunt componentele vectorului normal la plan iar x_0, y_0, z_0 sunt coordonatele unui punct din plan. Înlocuind în ecuaţia de mai sus, obţinem: $2(x-1) + (-15)(y-2) + 8(z-3) = 0$ şi de aici se obţine ecuaţia : $2x - 15y + 8z + 4 = 0$.

4.2.12 Calculăm întâi vectorii:

$$\mathbf{AB} = (0-1)\mathbf{i} + (1-(-1))\mathbf{j} + (2-1)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{AC} = (3-1)\mathbf{i} + (2-(-1))\mathbf{j} + (4-1)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Calculăm apoi vectorul normal la plan:

$$\mathbf{n} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

Formăm ecuaţia planului folosind ecuaţia generală:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Obţinem în final: $3(x-1) + 5(y+1) - 7(z-1) = 0$, adică $3x + 5y - 7z + 9 = 0$.

4.2.13 Coeficienţii lui x, y, z sunt proporţionali, deci cele două plane sunt paralele. Vom calcula distanţa dintre cele două plane folosind un punct din primul plan şi calculând distanţa de la acest punct la cel de-al doilea plan. Intersecţia planului (π_1) cu axa

$$Oz : \begin{cases} 2x - 7y + 5z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

este $(\pi_1) \cap Oz = M(0, 0, \frac{12}{5})$. Calculăm acum distanţa de la punctul M la planul (π_2):

$$\begin{aligned} d(M, \pi_2) &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + d|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{\left|2 \cdot 0 + (-7) \cdot 0 + 5 \cdot \frac{12}{5} + 3\right|}{\sqrt{2^2 + (-7)^2 + 5^2}} = \frac{15}{\sqrt{78}}. \end{aligned}$$

4.2.14 Vectorul director al dreptei (d) se obţine astfel:

$$\mathbf{d} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

Folosind ecuaţiile parametrice ale dreptei, obţinem în final ecuaţiile:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-3}{-7}.$$

4.2.15 Fie $M_2(x_0, y_0, z_0)$ proiecţia punctului $M_1(-1, 2, -2)$ pe planul (π). Formăm vectorul

$$\mathbf{M}_2\,\mathbf{M}_1 = (-1 - x_0)\mathbf{i} + (2 - y_0)\mathbf{j} + (-2 - z_0)\mathbf{k}.$$

Dar vectorul $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$ trebuie să fie paralel cu vectorul normal la plan $\mathbf{n}$, deci coeficienţii lor trebuie să fie proporţionali:

$$\frac{-1 - x_0}{3} = \frac{2 - y_0}{4} = \frac{-2 - z_0}{-7} = t,$$

de aici obţinem că:

$$\begin{cases} x_0 = -1 - 3t \\ y_0 = 2 - 4t \\ z_0 = -2 + 7t \end{cases}.$$

Dar $M_2(x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$, deci verifică ecuaţia acestui plan, prin înlocuire se obţine:

$$3(-1 - 3t) + 4(2 - 4t) - 7(7t - 2) + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{10}{37}.$$

În final obţinem : $x_0 = -1 - 3t = -\frac{67}{37}$, $y_0 = 2 - 4t = \frac{34}{37}$, $z_0 = 7t - 2 = -\frac{4}{37}$. Astfel proiecţia punctului $M_1(-1, 2, -2)$ pe plan este punctul

$$M_2\left(-\frac{67}{37}, \frac{34}{37}, -\frac{4}{37}\right).$$

4.2.16 Calculăm întâi vectorul director al dreptei (d):

$$\mathbf{d} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Fie punctul $A\,(x_0, y_0, z_0) \in (d)$, astfel ca vectorul $\mathbf{AM}\,(2 - x_0, 1 - y_0, -3 - z_0)$ să fie perpendicular pe vectorul $\mathbf{d}(2, -1, 3)$. Dar dacă

$$\begin{aligned} &\mathbf{AM} \perp \mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{AM} \cdot \mathbf{d} = 0 \Rightarrow \\ &2(2 - x_0) + (-1)(1 - y_0) + 3(-3 - z_0) = 0 \Rightarrow \\ &-2x_0 + y_0 - 3z_0 - 6 = 0. \end{aligned} \tag{(*)}$$

Dar $A\,(x_0, y_0, z_0) \in (d)$, deci coordonatele punctului A trebuie să verifice ecuaţia dreptei (d) şi în plus trebuie să verifice şi ecuaţia $(*)$, obţinem astfel sistemul:

$$\begin{cases} x_0 - y_0 - z_0 = 1 \\ 2x_0 + y_0 - z_0 = -2 \\ -2x_0 + y_0 - 3z_0 = 6. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem este $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Calculăm apoi:

$$\Delta_{x_0} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 18 \Rightarrow x_0 = \frac{\Delta_{x_0}}{\Delta} = -9 \tag{1}$$

$$\Delta_{y_0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow y_0 = \frac{\Delta_{y_0}}{\Delta} = -6 \tag{2}$$

$$\Delta_{z_0} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 20 \Rightarrow y_0 = \frac{\Delta_{z_0}}{\Delta} = -10 \tag{3}$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \mathbf{AM} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, atunci distanţa de la punctul A la dreapta (d) este

$$d(A,d) = \|\mathbf{AM}\| = \sqrt{219}.$$

4.2.17 Ecuaţia fasciculului de plane care conţine şi dreapta (d) se poate scrie:

$$x + y - 2z + 1 + \lambda(3x + 2y + z - 2) = 0.$$

Impunem condiţia ca planul (π) să fie perpendicular pe un plan al fasciculului, deci avem

$$3(1 + 3\lambda) + 5(1 + 2\lambda) - 6(-2 + \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{20}{13}.$$

De aici obţinem ecuaţia fasciculului:

$$x + y - 2z + 1 - \frac{20}{13}(3x + 2y + z - 2) = 0 \Rightarrow -47x - 27y - 46z + 53 = 0.$$

Deci, ecuaţia dreptei care este proiecţia dreptei (d) pe planul (π), se scrie:

$$(d_1) : \begin{cases} -47x - 27y - 46z + 53 = 0 \\ 3x + 5y - 6z + 10 = 0. \end{cases}$$

4.2.18 Din ecuaţiile planului şi a dreptei formăm un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute pe care îl rezolvăm:

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Calculăm determinantul sistemului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Apoi calculăm:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Deci, dreapta (d) intersectează planul (π) într-un punct de coordonate $(-1, 1, 2)$.

4.2.19 Mobilul se mişcă pe o dreaptă care trece prin punctul M şi are ca vector director pe $\mathbf{v}$ considerăm că la momentul t mobilul a ajuns în punctul $A\,(x, y, z)$. Folosind ecuaţiile vectoriale ale dreptei: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{v}$, obţinem poziţia mobilului la momentul t

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -1 - 7t \\ z = -3 + 3t. \end{cases}$$

De aici obţinem ecuaţiile dreptei:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z+3}{3}.$$

4.2.20 Vectorii de poziţie ai punctelor $M_1 \in (d)$, respectiv $M_2 \in (d_2)$ sunt

$$\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

şi

$$\mathbf{r}_2 = 8\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Vectorii directori ai celor două drepte sunt:

$$\mathbf{d}_1 = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \text{ şi } \mathbf{d}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Obţinem produsul mixt $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 0$, deci lungimea perpendicularei comune este nulă. Ecuaţia planului determinat de cele două drepte va fi dată de:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8x + 22y - z + 48 = 0.$$

Conice

4.2.21 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -1 & -7 & -13 \end{pmatrix}$, $I = 3 + 3 = 6$, $\delta = \det A = -16 \neq 0$, $\Delta = \det \widetilde{A} = 128 \neq 0$, $f(a, b) = \dfrac{\Delta}{\delta} = -8$. Conica are centru unic $(\delta \neq 0)$ şi este nedegenerată $(\Delta \neq 0)$. Pentru translaţie avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x + 10y - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 10x + 6y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow 0'(a = 2, b = -1) \text{ şi } \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 1 \end{cases} .$$

După translaţia de vector $00'$, ecuaţia devine :

$$f(x', y') = 3x'^2 + 10x'y' + 3y'^2 - 8 = 0.$$

Determinăm rotaţia de unghi α în jurul originii $0'$. Ecuaţia caracteristică:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - I\lambda + \delta = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0,$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = 8$ şi $\lambda_2 = -2$ (valori proprii).

Ecuaţia devine: $f(x'', y'') = 8x''^2 - 2y''^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow (H) : x''^2 - \dfrac{y''^2}{4} - 1 = 0$ (hiperbolă).

Pentru determinarea valorilor vectorilor proprii să considerăm sistemul caracteristic

$$\begin{cases} (3-\lambda)x + 5y = 0 \\ 5x + (3-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

Pentru $\lambda = 8$ avem $\begin{cases} -5x' + 5y' = 0 \\ 5x' - 5y' = 0, \end{cases}$ cu soluţiile $x' = y' = \alpha$ şi cu vectorii proprii corespunzători $\mathbf{v}_1 = (\alpha, \alpha) = \alpha(1,1) = \alpha\mathbf{u}_1$, $\|\,\mathbf{u}_1\| = \sqrt{2}$ şi $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Pentru $\lambda = -2$ avem $\begin{cases} -5x' + 5y' = 0 \\ 5x' - 5y' = 0 \end{cases}$ cu soluţiile $x' = -y'$ şi cu vectorii proprii corespunzători $\mathbf{v}_2 = (-\beta, \beta) = \beta(-1,1) = \beta\mathbf{u}_1$, cu $\|\,\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2}$ şi $\mathbf{e}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Matricea de rotaţie este

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

cu $\det C = 1$ şi $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$.

Fig. 3.31

4.2.22 $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\delta = 0\,,\ I = 10\,,\ \Delta = -25$.

Cum $\delta = 0$, rezultă că avem de a face cu o conică fără centru unic. Deoarece $\Delta \neq 0$ este o conică nedegenerată. Prin urmare, conica este o parabolă. Reducerea la forma canonică se începe cu o rotaţie de unghi α în jurul originii axelor, 0. Ecuaţia caracteristică este:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda = 0,$$

cu valorile proprii $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = 10$. Sistemul caracteristic este:

$$\begin{cases} (9-\lambda)x - 3y = 0; \\ -3x + (1-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

Pentru $\lambda = \lambda_1 = 0$ avem $\begin{cases} 9x - 3y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 3\alpha \end{cases}$ şi $\mathbf{v}_1 = (\alpha, 3\alpha) = \alpha(1,3) = \alpha\mathbf{u}_1$,

$$\|\,\mathbf{u}_1\| = \sqrt{10} \Rightarrow \mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

Pentru $\lambda = \lambda_1 = 10$ avem $\begin{cases} -x - 3y = 0 \\ -3x - 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3\beta \\ y = \beta \end{cases}$ şi $\mathbf{v}_2 = (-3\beta, \beta) = \beta(-3,1) = \beta\mathbf{u}_2$,

$$\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{10} \Rightarrow \mathbf{e}_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Matricea de rotaţie este

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

şi $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. $X = CX' \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' - 3y'}{\sqrt{10}} \\ y = \dfrac{3x' + y'}{\sqrt{10}} \end{cases}$. Ecuaţia conicei devine

$$f(x', y') = 10{y'}^2 + \sqrt{10}(x' + y') = 0.$$

Translaţia de vector $\mathbf{00'}$, unde $0'(x' = a, y' = b)$ are formulele: $\begin{cases} x' = a + x'' \\ y' = b + y'' \end{cases}$ şi

$$f(x'', y'') = y''^2 + \frac{1}{\sqrt{10}}x'' + \left(2b + \frac{1}{\sqrt{10}}\right)y'' + \left(b^2 + \frac{a+b}{\sqrt{10}}\right) = 0.$$

Egalând termenii din paranteze cu 0 obţinem $a = \dfrac{1}{4\sqrt{10}}$, $b = -\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$ ecuaţia devine

$$y''^2 = -\frac{1}{\sqrt{10}}x''.$$

Fig. 3.32

4.2.23 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\delta = -1$, $\Delta = 0$, $I = 4$. Cum $\Delta = \det \widetilde{A} = 0$, rezultă că avem de a face cu o conică degenerată. Rezolvăm ecuaţia $y^2 + 4xy + (3x^2 - 2x - 1) = 0$ cu discriminantul $\Delta_y = (x+1)^2$. Se obţin două drepte secante$(d_1) : y = -x + 1$, şi $(d_2) : y = -3x - 1$.

Fig. 3.33

4.2.24 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $I = 3$, $\alpha = 1$, $\Delta = 0$, este o conică degenerată cu centru unic. Ecuaţia devine

$$2y^2 + 2(x+3)y + (x^2 + 9) = 0$$

cu discriminantul $\Delta_y = -4(x-3)^2 \leq 0$. Ecuaţia are soluţie reală pentru $x - 3 = 0$ şi anume un singur punct $0'(3, -3)$.

Fig. 3.34

4.3 Probleme propuse

4.3.1 În sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$, se consideră vectorii $\overline{u}\,(p, q, q-p)$, $\overline{v}\,(q-p, q, p)$ şi punctul $A\,(a, a+b, b)$, unde $a, b, p, q \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine ecuaţia planelor determinate de vectorii $\overline{u}$ şi $\overline{v}$;

b) Să se arate că planul determinat de vectorii $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ care trece prin punctul A trece şi prin originea sistemului de axe de coordonate;

c) Să se determine condiţiile în care dreapta (OA) este bisectoare a unghiului format de de dreptele suport ale vectorilor $\overline{u}$, respectiv $\overline{v}$.

4.3.2 Se consideră planele $(P_1): \ 4x - 3y + z - 4 = 0$, $(P_2): \ 2x - y - z = 0$ şi dreptele $(d_{12}) = (P_1) \cap (P_2)$, $(d): \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei (d_{12});

b) Să se determine poziţia dreptelor (d_{12}) şi (d);

c) Să se calculeze distanţa de la dreapta (d) la planul (P_1).

4.3.3 Se consideră planele $(P_1): \ x - y + z + 2 = 0$, $(P_2): \ x + y + 2z - 1 = 0$ şi punctul $A\,(2,1,1)$.

a) Să se determine ecuaţia dreptei (d) care trece prin punctul A şi este paralelă cu planele (P_1), (P_2);

b) Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta (d);

c) Să se determine aria trunghiului determinat de punctul A şi proiecţiile punctului A pe planele (P_1), respectiv (P_2).

4.3.4 În sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$, se consideră punctele $A\,(-a,a,2a)$, $B\,(a,a,0)$, $M\,(0,0,a)$ Cşi D, unde $a \in (0,\infty)$, C este simetricul punctului B faţă de axa Ox, iar D este simetricul punctului B faţă de punctul M.

a) Să se scrie ecuaţiile dreptelor (AM), respectiv (BM);

b) Să se arate că dreapta (AM) intersectează planul Oxy în punctul C;

c) Să se arate că punctul M este egal depărtat de punctele A, B, respectiv C;

d) Să se demonstreze că punctele A, B, C, D sunt coplanare, iar apoi să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$.

4.3.5 În sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$, se consideră punctele $A\,(3,4,12)$, $B\,(4,12,3)$, $C\,(12,3,4)$ şi $D\,(4,3,12)$.

a) Să se arate că punctele A, B, C sunt egal depărtate de originea sistemului de axe;

b) Să se arate că punctele A, B, C, D sunt coplanare.

4.3.6 Se consideră dreapta $(d): \begin{cases} x = -1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ şi punctele $A\,(1,1,0)$, $B\,(0,-1,1)$.

a) Dacă punctele C şi D sunt proiecţiile punctelor A, respectiv B pe dreapta (d), să se determine aria patrulaterului $ABDC$;

b) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta (d);

c) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul B şi este perpendiculară pe planul determinat de punctul A şi dreapta (d).

4.3.7 Se consideră dreptele

$$(d_1): \ \frac{x}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-4},$$
$$(d_2): \ \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{3},$$
$$(d_3): \ \frac{x-4}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$$

şi punctele A, B, C unde $(d_1) \cap (d_3) = \{A\}$, $(d_2) \cap (d_1) = \{B\}$ şi $(d_3) \cap (d_3) = \{C\}$.

a) Să se arate că dreptele (d_1), (d_2), (d_3) sunt coplanare şi să se scrie ecuaţia planului determinat de ele;

b) Să se arate că puncte A, B, C sunt egal depărtate de punctul $O\,(0,0,0)$;

c) Să se determine proiecţia punctului $O\,(0,0,0)$ pe planul (A,B,C).

4.3.8 Fie $a \in \mathbb{R}$ un paramentru real. Se consideră vectorii $\overline{v}_1\,(-1,1-a,a)$, $\overline{v}_2\,(2a-1,-1-a,2-a)$ şi punctul $A\,(1,1,1)$.

a) Să se scrie ecuaţia planului determinat de vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, care trece prin punctul $O\,(0,0,0)$;

b) Să se determine coordonatele punctului A_1, simetricul punctului A faţă de planul (O,v_1,v_2);

c) Să se determine valoarea lui $a \in (0,\infty)$ pentru care paralelipipedul determinat de vectorii $\overline{OA},\overline{v}_1,\overline{v}_2$ este un paralelipiped dreptunghic cu volumul 6.

4.3.9 Se consideră dreptele

$$(d_1): \ \ x-1=y-1=1-z,$$

$$(d_2): \ \ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$$

şi punctul A, unde $(d_1)\cap(d_2)=\{A\}$.

a) Să se scrie ecuaţia planului determinat de dreptele (d_1), (d_2);

b) Să se scrie ecuaţia dreptei care reprezintă proiecţia dreptei OA pe planul $((d_1),(d_2))$.

4.3.10 În sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$, se consideră punctele $A\,(2,1,0)$, $B\,(0,-1,4)$ şi $C\,(0,2,1)$.

a) Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC;

b) Să se scrie ecuaţia planului care trece prin originea sistemului de axe şi este perpendicular pe planul (A,B,C);

Să se reprezinte grafic conicele de ecuaţii:

4.3.11 $f(x,y)=4xy+3y^2+16x+12y-36=0$;

4.3.12 $f(x,y)=7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$;

4.3.13 $f(x,y)=11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$;

4.3.14 $f(x,y)=41x^2+24xy+34y^2+34x-112y+129=0$;

4.3.15 $f(x,y)=5x^2-6xy+2y^2-2x+2=0$;

4.3.16 $f(x,y)=x^2+4xy+3y^2-6x-12y+9=0$;

4.3.17 $f(x,y)=3x^2+10xy+3y^2+4x-4y+14=0$;

4.3.18 $f(x,y)=x^2-xy-2y^2+4x+y+3=0$;

4.3.19 $f(x,y)=x^2+y^2-6x+4y+14=0$.

Bibliografie

[1] Andrica D., Duca I.D., Purdea I., Pop Ioana, *Matematică de bază*, Editura Studium, Cluj Napoca, 2000

[2] Coţa A., Rado M., Răduţiu M., Vornicescu F., *Matematică, Geometrie şi Trigonometrie*, Manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1987

[3] Coţa A., Kurthy E., Popa E.F., Rado M., Răduţiu M., Vornicescu F., *Matematică, Geometrie şi Trigonometrie*, Manual pentru clasa a X-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1987

[4] Galbură Gh., Rado F., *Geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973

[5] Pop S. Maria, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Cub Press, Baia Mare, 1998

[6] Vasiu A., *Curs de geometrie*, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj Napoca, 1992

Partea III

Analiză matematică

Capitolul 1

Şiruri de numere reale

1.1 Şiruri de numere reale

1.1.1 Definiţie. Se numeşte **şir** de numere reale o funcţie definită pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ cu valori în mulţimea $\mathbb{R}$. Dacă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, atunci se foloseşte notaţia $f(n) = f_n$, indicele reprezentând variabila acestei funcţii.

1.1.2 Exemplu. Considerăm

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \;\; a_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

Mulţimea valorilor acestui şir este

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{2}{4} ..., a_n = \frac{n-1}{n+1} ...$$

Şirul se notează prin mulţimea valorilor termenilor sau folosind termenul general $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alte notaţii

$$a_n, \; \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \;\; (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Toate aceste funcţii reale (şiruri de numere reale) sunt obţinute cu ajutorul termenului general a_n.

1.1.3 Definiţie. Şir monoton. Un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **monoton** dacă este crescător (sau descrescător).

Fiind dată o funcţie, reamintim că funcţia $f : X \to Y$ este crescătoare dacă

$$\left.\begin{array}{l} (\forall)\; x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in X \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) < f(f_2)$$

şi descrescătoare dacă

$$\left.\begin{array}{l} (\forall)\; x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in X \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) > f(f_2).$$

1.1.4. Exemplu. Şirul (a_n) care satisface $a_{n+1} < a_n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ este descrescător, deoarece $n + 1 > n$ şi valorile $a_{n+1} < a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

1.1.5. Definiţie. **Şir mărginit**. Spunem că un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **mărginit**, dacă există două numere m; $M \in \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$

$$m \le a_n \le M.$$

1.1.6. Definiţie. Şir convergent. Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent spre numărul $a \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $(\exists) N(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

1.1.7. Observaţii. 1) Relaţia $|a_n - a| < \varepsilon$ este echivalentă cu

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n < a + \varepsilon \\ a_n > a - \varepsilon. \end{array}\right.$$

2) Definiţia convergenţei se poate formula: şirul $(a_n) \to a$ (sau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$) dacă pentru orice vecinătate $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ a numărului a, există un rang al termenilor notat $N(\varepsilon)$ (depinde de ε) de la care începând, toţi termeni se află în această vecinătate (iar înafara acestei vecinătăţi vor fi un număr finit de termeni).

1.1.8. Aplicaţii. Folosind definiţia convergenţei unui şir, arătaţi că

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\ \ 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0.$$

Soluţie. Vom arăta convergenţa şirurilor propuse, precizând existenţa rangului $N(\varepsilon)$ pentru orice $\varepsilon>0$.

(1) Din $|a_n-a| = \left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ rezultă $n > \frac{1}{\varepsilon}$, deci există $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, pentru orice $\varepsilon>0$. Astfel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(2) Din $|a_n-a| = \left|\frac{1}{2^n}-0\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ rezultă $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$, $(\forall)\varepsilon>0$. Aplicăm funcţia $\log_2 x$, care are baza $2>1$, deci este crescătoare şi obţinem $n > \log_2\frac{1}{\varepsilon}$. Astfel există $N(\varepsilon) = \left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]$, deci şirul $\frac{1}{2^n}\to 0$ (când $n\to\infty$).

1.1.9 Definiţie. Un şir care nu este convergent se numeşte **divergent**. În această situaţie, şirul poate avea limita $\pm\infty$ sau nu are limită.

1.1.10 Definiţie. Spunem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, dacă $(\forall)\,M>0, (\exists)\,N(M)>0$ astfel încât pentru orice $n>N(M)$ să rezulte $a_n > M$.

1.1.11 Exemplu. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = \infty$, deoarece din inegalitatea $a_n = 3^n > M$ pentru orice $M>0$, obţinem $n = \log_3 3^n > \log_3 M$, deci există $N(M) = [\log_3 M]$.

1.1.12 Exemple. Studiaţi convergenţa şirului cu termenul general

$$a_n = \frac{n-1}{n+1},\ \ n\ge 1.$$

Folosind definiţia convergenţei unui şir de numere reale, vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1} = 1$. Avem

$$|a_n-a| = \left|\frac{n-1}{n+1}-1\right| = \left|\frac{n-1-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Obţinem $n > \frac{2}{\varepsilon}-1$şi deci $(\exists)$ $N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]$.

Comentariu. Dacă $\varepsilon = \frac{1}{10}$, atunci

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\frac{1}{10}}-1\right] = [20-1] = 19.$$

Deci pentru $n>19$, adică de la termenul a_{20}), toţi termenii se află la o distanţă mai mică decât 0, 10 faţă de 1.

$$|a_{20}-1| = \left|\frac{20-1}{20+1}-1\right| = \left|\frac{19}{21}-1\right| = \frac{2}{21} < \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,10.$$

Dacă alegem $\varepsilon = \frac{1}{100}$, atunci rangul termenului (care depinde de ε) va fi:

$$N\left(\frac{1}{100}\right) = \left[\frac{2}{\frac{1}{100}}-1\right] = 199.$$

De la termenul a_{200}, toţi termenii şirului a_n vor fi la o distanţă mai mică de $\frac{1}{100}$ faţă de 1.

1.1.13 Aplicaţie. Studiaţi limita şirului $a_n = (-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Observăm că

$$a_n = (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{2} \to \begin{cases} 0, & n = 4k+1 \\ 1, & n = 2k \\ 2, & n = 4k+3 \end{cases}$$

Şirul având trei puncte limită $\{-2, 0, 1\}$, nu este convergent.

1.1.14 Definiţie. Puncte limită ale unui şir. Un număr a_0 se numeşte **punct limită** a unui şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă orice vecinătate a sa $V(a_0)$ conţine cel puţin un termen al şirului diferit de a_0 (acesta poate aparţine sau nu şirului)

1.1.15 Observaţie. Dacă a_0 este un punct limită al şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci orice vecinătatre a sa conţine chiar o infinitate de termeni ai şirului.

Remarcăm că definiţia şi observaţia de mai sus sunt cazuri particulare ale definiţiei punctului de acumulare al unei mulţimi, aici mulţimea fiind formată din termenii şirului (a_n).

1.1.16 Exemplu.

$$a_n = (-1)^n + \cos\frac{n\pi}{4} = \begin{cases} 1+1=2 & n = 8k \\ -1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} & n = 8k+1 \\ 1+0=1 & n = 8k+2 \\ -1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} & n = 8k+3 \\ 1-1=0 & n = 8k+4 \\ -1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} & n = 8k+5 \\ 1+0=1 & n = 8k+6 \\ -1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} & n = 8k+7 \end{cases}$$

deci

$$a_n = \begin{cases} -1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{pentru } n = 8k+3;\ n = 8k+5 \\ -1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{pentru } n = 8k+1;\ n = 8k+7 \\ 0 & \text{pentru } n = 8k+4; \\ 1 & \text{pentru } n = 8k+2; \\ 2 & \text{pentru } n = 8k. \end{cases}$$

Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $a_n = (-1)^n + \cos\frac{n\pi}{4}$, $n \geq 1$, are cinci puncte limită. Dacă notăm $\mathcal{L}-$mulţimea punctelor limită ale şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, atunci

$$\mathcal{L} = \left\{-1-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -1+\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0;\ 1; 2\right\}$$

1.1.17 Definiţii. Marginea superioară L a mulţimii $\mathcal{L}$ se numeşte limită superioară a şirului,

$$L = \sup\mathcal{L} = \limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Marginea inferioară l a mulţimii $\mathcal{L}$ se numeşte **limită inferioară** a şirului,

$$l = \inf\mathcal{L} = \liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

În exemplul anterior $L = 2,\ l = -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1.1.18 Proprietăţile marginii inferioare şi superioare ale unui şir. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi l, L limitele inferioară, respectiv superioară ale şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, avem:

1) La stânga lui $l-\varepsilon$ şi la dreapta lui $l+\varepsilon$ se află un număr finit de termeni ai şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

2) În intervalul $(l-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$ se află un număr finit de termeni ai şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.1.19 Teoremă. *Condiţia necesară şi suficientă ca un şir* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *care are*

$$l=\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \text{ şi } L=\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n,$$

să fie convergent este ca $l=L$.

Demonstraţia este imediată.

1.1.20 Teoremă. Operaţii cu şiruri convergente. *Fie şirurile* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *convergente, cu* $\lim a_n=a$, *respectiv* $\lim b_n=b$. *Au loc*

$$\begin{array}{ll} 1) & \lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\pm b; \\ 2) & \lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\cdot b; \\ 3) & \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}; \\ 4) & \lim\limits_{n\to\infty}a_n^{b_n}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=a^b. \end{array}$$

Excepţie: nedeterminările de forma $\infty-\infty$, $\infty\cdot 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, 1^∞, 0^0 şi ∞^0.

1.1.21 Limite remarcabile de forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

1).

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{P_s^{(n)}}{Q_p^{(n)}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^s+a_1n^{s-1}+...+a_{s-1}n+a_s}{b_0n^p+b_1n^{p-1}+...+b_{p-1}n+b_p}= \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^s\left[a_0+\dfrac{a_1}{n}+...+\dfrac{a_{s-1}}{n^{s-1}}+\dfrac{a_s}{n^s}\right]}{n^p\left[b_0+\dfrac{b_1}{n}+...+\dfrac{b_{p-1}}{n^{p-1}}+\dfrac{b_p}{n^p}\right]}=\lim_{n\to\infty}n^{s-p}\cdot\frac{a_0}{b_0}\end{aligned}$$

(deoarece $\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^2},...,\dfrac{1}{n^s},...,\dfrac{1}{n^p}$ au limita zero) şi deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_s(n)}{Q_p(n)}=\begin{cases}\infty\cdot sign\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{pentru } s>p\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{pentru } s\neq p\\ 0, & \text{pentru } s<p.\end{cases}$$

S-a notat $sign\dfrac{a_0}{b_0}$ =(signum = signatura =) semnul lui $\dfrac{a_0}{b_0}$.

1.1.22 Exemple. Să se arate că: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}=0$ pentru $\alpha>0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n^\alpha}=\infty$, unde $a>1$, $\alpha>0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{\ln n}=\infty$, unde $a>1$.

Limitele de la 2), 3), 4) compară modul în care **se duc spre infinit** funcţiile crescătoare: $y=\ln n$ (şi general $y=\log_a x,\ a>1$), $y=a^n,\ a>1,\ y=n^\alpha,\ \alpha>0$.

Figurăm alăturat graficele funcţiilor crescătoare

$$\begin{aligned}&y=a^x,\ a>1;\\ &y=x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R};\\ &y=\log_a x,\ a>1\end{aligned}$$

Figura 1

Figura 2

1.2 Criterii de convergenţă

1.2.1 Teoremă. Criteriul general de convergenţă (al lui Cauchy) *Condiţia necesară şi suficientă ca şirul de numere reale* $(a_n)_{n\geq 1}$ *să fie convergent este* $(\forall)\varepsilon > 0$ *există un număr* $N(\varepsilon)$ *astfel ca pentru orice* $p \in \mathbb{N}^*$ *are loc*

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

(Cauchy-matematician francez. A fost ministru al Educaţiei, după căderea lui Napoleon)

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Să presupunem că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are limita a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Folosind definiţia convergenţei unui şir, va rezulta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$

$$|a_n - a| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}, \text{ deci şi } |a_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ p > 1.$$

Diferenţa

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - a + a - a_n| \leq |a_{n+p} - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon = \varepsilon.$$

Condiţia este suficientă. Presupunem că $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ în condiţiile: $(\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $p = 1, 2, 3, ...$(întreg). Cu alte cuvinte inegalitatea $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ are loc pentru valori $n+p > N+p$ şi deci termenii a_{N+p} $(p = 1, 2, 3, ...)$ se află în intervalul $(a_N - \varepsilon,\ a_N + \varepsilon)$, iar $a_1, a_2, ..., a_{N-1}$ sunt înafara acestui interval. Într-adevăr inegalitatea $|a_{N+p} - a_N| < \varepsilon$ implică $-\varepsilon < a_{N+p} < a_N < \varepsilon$ sau $a_N - \varepsilon < a_{N+p} < a_N + \varepsilon$. Notăm $a_N - \varepsilon = l$, $a_N + \varepsilon = L$ Rezultă $0 \leq L - l < 2\varepsilon$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, iar L şi l fixe. Diferenţa $L - l$ nu poate fi oricât de mică (oricare ar fi $\varepsilon > 0$), numai dacă $L = l$. Avem deci: de la un rang $n > N(\varepsilon)$, toţi termenii şirului $a_{N+p} \in (l, L)$, rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

1.2.2 Definiţie. Se numeşte şir Cauchy (fundamental) un şir cu proprietatea ca pentru orice $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$ să aibe loc

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

(şirul din criteriul general al lui Cauchy, dat mai sus).

1.2.3 Aplicaţie. Teorema 1.2.1 a fost dată de Cauchy cu scopul de a demonstra divergenţa şirului cu termen general

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n},\quad n \in \mathbb{N}^*,$$

care reprezintă suma de rang n a inverselor numerelor naturale. Această sumă apare în media armonică a numerelor naturale. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

Soluţie. Formăm

$$|a_{n+p} - a_n| = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{cel mai mare termen}} + \frac{1}{n+2} + ... + \underbrace{\frac{1}{n+p}}_{\text{cel mai mic termen}} > p\frac{1}{n+p} = (\text{aleg } p = n) = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2},$$

care nu poate fi oricât de mic.

Observăm că demonstraţia divergenţei folosind criteriul general al lui Cauchy va trebui să nege afirmaţiile criteriului enunţat.

1.2.4 Exemplu. Folosind criteriul general al lui Cauchy, demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent, iar şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent, unde

$$\begin{aligned}
\text{a) } a_n &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}; \\
\text{b) } b_n &= \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + ... + \frac{1}{[1 + 3(n-1)][1 + 3n]}.
\end{aligned}$$

Soluţie. a) Formăm

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n+p}}>p\cdot\frac{1}{\sqrt{n+p}}= \\ &= \left(\overset{\text{Aleg}}{p=n}\right)=\frac{n}{\sqrt{2n}}=\sqrt{\frac{n}{2}}>1 \text{ pentru } n>2,\end{aligned}$$

deci diferenţa nu poate fi oricât de mică pentru un p ales.

b) Pentru a demonstra afirmaţia de convergenţă va trebui să arătăm existenţa lui $N(\varepsilon)$ în condiţiile criteriului. Avem diferenţa

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{(1+3n)\left[1+3(n+1)\right]}+...+\frac{1}{\left[1+3(n+p-1)\right]\left[1+3(n+p)\right]}$$

Dar

$$\frac{1}{(1+3n)\left[1+3(n+1)\right]}=\frac{1}{(1+3n)(4+3n)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right].$$

Deci

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= \frac{1}{3}\left|\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}+\right. \\ &\quad +\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{3n+7}+ \\ &\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\ &\quad \left.+\frac{1}{3n+3p-2}-\frac{1}{3n+3p+1}\right| = \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+3p+1}\right]<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon\end{aligned}$$

pentru orice $\varepsilon>0$. Va rezulta $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Am găsit în acest mod $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ şi deci şirul este convergent conform acestui criteriu.

1.2.5 Teoremă. Criteriu de convergenţă pentru şiruri monotone, Criteriul lui Weierstrass. *Un şir monoton şi mărginit este convergent.*

Demonstraţie. Considerăm un şir $(a_n)\,n\geq 1$ mărginit, deci nu poate avea limite infinite. Vom arăta că are o singură limită. Fără a restrânge generalitatea, considerăm şirul crescător având două puncte limită $l,L,l\neq L$. Împărţim intervalul $L-l$ în trei şi notăm $\varepsilon=\frac{L-l}{3}$

Intervalele $(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$, $(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$ sunt disjuncte. Considerăm un indice n_1, astfel încât $a_{n_1}\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$. Va exista un indice n_2,astfel încât $n_2>n_1$ şi $a_{n_2}\in(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$. În caz contrar, intervalul al doilea nu ar mai conţine o intimitate de termeni şi L nu ar mai fi punct limită. Deoarece şirul este crescător rezultă

$$a_{n_1}<a_{n_2} \text{ pentru } n_1<n_2. \tag{1}$$

Dacă $n>n_2$, intervalul al doilea $(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$ nu poate conţine toţi termenii şirului, deoarece în acest caz, în primul intervalar fi un număr finit de termeni şi l nu ar putea fi punct limită. Rezultă că pentru $n=n_3>n_2$

$$a_{n_3>}a_{n_2} \text{ pentru } n_3>n_2. \tag{2}$$

Inegalităţile (1) şi (2) luate împreună contrazic monotonia şirului, va rezulta deci că $l=L$ şi deci şirul este convergent.

1.2.6. Şiruri remarcabile

1. Numărul e. Considerăm şirul $(e_n)_{n\geq1}$ cu termenul general $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\geq1$. Vom arăta că şirul $(e_n)_{n\geq1}$ este monoton crescător şi mărginit.

Soluţie. Folosind binomul lui Newton are loc

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + C_n^3\frac{1}{n^3} + ... + C_n^n\frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Dar $0 < 1 - \dfrac{i}{n} < 1$ pentru $i = 1, ..., n-1$, deci pentru orice $n \geq 1$

$$e_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Avem

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n-1}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

rezultă $a_{n+1} > a_n$, $n \geq 1$ deoarece a_{n+1} are fiecare termen de acelaşi rang mai mare decât termenul corespunzător al din a_n, în plus mai are un termen pozitiv.

În concluzie, sirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător şi mărginit, deci este convergent. Limita acestui şir se notează cu $e \in (2,3)$ (în onoarea matematicianului elveţian Euler)

$$e = 2,7182818284...$$

Este un număr transcendent. Transcendenţa sa se datorează faptului că nu se poate obţine din ecuaţii care folosesc operaţiile algebrice (adunare, scădere, înmulţire...)

Generalizare

$$\lim_{n\to\infty}(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}} = e \text{ oricare ar fi şirul } (u_n)_{n\geq 1} \text{ cu } u_n \to 0, \text{ când } n \to \infty.$$

1.2.7. Teoremă. **Criteriul lui Stolz**.*Dacă* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este un şir oarecare, iar* $(y_n)_{n\geq 1}$ *este un şir crescător cu* $\lim n \to \infty y_n = \infty$ *astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1-}x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \textit{ (finit sau nu)},$$

atunci există

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1-}x_n}{y_{n+1}-y_n} = l.$$

Reciproca nu are loc.

1.2.8. Exemple. 1) Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ şi definim

$$m_{\text{aritm}}(a_1, a_2, ...a_n) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \ \ n \geq 1.$$

Notăm $x_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $y_n = n$, $n \geq 1$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1-}x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty}a_{n+1}.$$

Constatăm că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}m_{\text{aritm}}(a_1, ..., a_n) = \lim_{n\to\infty}a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}a_n.$$

2) Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$. Pentru orice $n \geq 1$, notăm m_{aritm}= media armonică $(a_1, a_2, ..., a_n)$ definită prin relaţia

$$\frac{n}{m_{\text{arm}}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \text{ sau } \frac{1}{m_{\text{arm}}} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Aplicăm criteriul lui Stolz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}-\left(\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}\right)}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m_{\text{arm}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}$$

sau

$$\lim_{n\to\infty}m_{\text{arm}}\left(a_1,...,a_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

Observăm că dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent (şi are limita a) atunci

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}m_{\text{arm}}\left(a_1,...,a_n\right)=\lim_{n\to\infty}m_{\text{aritm}}\left(a_1,...,a_n\right).$$

3) Dacă termenii şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, sunt pozitivi $a_n>0$, definim

$$m_g\left(a_1,...,a_n\right)=\sqrt[n]{a_1,a_2...a_n},\ \ n\geq 1.$$

Între mediile aritmetice, geometrică şi armonică există inegalităţile

$$m_{\text{aritm}}\geq m_g\geq m_{\text{arm}},$$

egalitatea având loc când $a_1=a_2=...=a_n$.

Demonstraţia acestor inegalităţi rezultă imediat pentru cazul $n=2$. Pentru $n>2$ sunt necesare consideraţii asupra extremului funcţiilor de mai multe variabile.

Folosind metoda "cleştelui", pentru $n\to\infty$ (suficient de mare), se constată că cele trei medii tind spre aceeaşi limită. Această observaţie este utilă în teoria probabilităţilor.

1.2.9. Consecinţă. Dacă $a_n>0,\ n\in\mathbb{N}$, atunci

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot a_{n-1}}=...=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_1}{1}}=\\&=\lim_{n\to\infty}m_g\left(\frac{a_1}{a_0},\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},...,\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}.\end{aligned}$$

cu $\mathrm{a}_0=1$.

Va rezulta relaţia utilă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\ \text{pentru}\,a_n>0,\ a_0=1.$$

1.2.10. Exemple.

1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\frac{n+1}{n}=1;$

2) $\lim\sqrt[n]{a}=\lim\frac{a}{a}=1,\ a>0.$

1.2.11 Teoremă. Criteriul raportului. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numerele reale strict pozitive cu proprieatea că există $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$. Sunt adevărate afirmaţiile de mai jos:*

(i) Dacă $l<1$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

(ii) Dacă $l>1$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

Demonstraţia teoremei se bazează pe teorema de convergenţă cu ε.

1.2.12 Exemplu. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}$, unde $a\in\mathbb{R}_+^*$.

Notăm $a_n=\dfrac{a^n}{n!}$. Rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0<1,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Capitolul 2

Serii de numere

2.1 Serii de numere

Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$. Cea mai simplă operaţie pe care o putem face cu termenii şirului, adunarea este o sumă cu o infinitate de termeni. Ştim să adunăm doi, trei,...,un milion,..., oricâţi termeni cu condiţia să ştim câţi termeni adunăm. Pentru a da un sens acestei sume (infinite): $a_1+a_2+...+a_n+...$ introducem sumele parţiale (care formează un şir)

$$\begin{array}{l} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ ---------- \\ s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \\ --------- \end{array}$$

Şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poate fi convergent, caz în care notăm $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ şi $s = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

2.1.1 Definiţie. Se numeşte **serie** o suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Dacă $s = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, ea se numeşte suma seriei; a_n se numesc termenii seriei; (s_n) $-$şirul sumelor parţiale, unde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \geq 1$.

Notaţie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sau $\sum a_n$ (fără a specifica valorile posibile ale lui n)

2.1.2 Definiţie. Spunem că seria $\sum a_n$ este convergentă (divergentă, oscilantă) după cum şirul sumelor parţiale s_n este convergent (divergent, oscilant).

2.1.3 Observaţie. Dacă se suprimă un număr finit de termeni ai unei serii, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială.

2.1.4 Exemple. 1) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, numită **seria armonică** este divergentă deoarece şirul sumelor parţiale

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}, \ \ n \geq 1$$

este un şir divergent (Criteriul general Cauchy).

2) Fie $q \in \mathbb{R}$. **Seria geometrică** este

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$$

Pentru $q \neq 1$, suma primilor n termeni ai unei progresie geometrice $\div\!\!\div a_0, a_0q, ..., a_0q^{n-1}$ este

$$s_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1} = \frac{a_0 q^{n-1} \cdot q - a_0}{q-1} = a_0 \frac{1-q^n}{1-q}, \ \ n \geq 1.$$

Deci

$$s_n \to \begin{cases} \dfrac{a_0}{1-q}, |q| < 1 \\ a_0 \cdot \infty, \ |q| > 1. \end{cases}$$

Dacă $q = 1$, atunci $a_n = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Va rezulta că seria geometrică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă, pentru $|q| < 1$ şi este divergentă, pentru $|q| \geq 1$.

2.1.5 Teoremă. Criteriul general al lui Cauchy de convergenţă a unei serii. *Condiţia necesară şi suficientă ca seria* $\sum a_n$ *să fie convergentă este ca pentru* $(\forall)\, \varepsilon > 0$ $(\exists)\, N(\varepsilon)$ *astfel încât pentru orice* $n > N(\varepsilon)$ *şi orice* $p \in \mathbb{N}^*$ *să aibă loc:*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Folosim criteriul general al lui Cauchy pentru şirul sumelor parţiale $s_n = a_1 + ... + a_n$. Are loc

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon,$$

de unde rezultă teorema de mai sus.

2.1.6 Consecinţa. În cazul unei serii convergente termenul ei general are limita zero. Într-adevăr, alegând $p = 1$ şi folosind criteriul de mai sus rezultă $|a_{n+1}| < \varepsilon$ care este echivalent cu $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}| = 0$. Această condiţie este necesară, dar nu este suficientă pentru convergenţa unei serii.

2.1.7 Exemplu. Seria $\sum \frac{1}{n}$ are $\frac{1}{n} \to 0$, dar este o serie divergentă (seria armonică).

2.1.8 Consecinţa Dacă la seria $\sum a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci seria este divergentă, fapt care rezultă din Consecinţa 1).

2.1.9 Exemplu. Fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+5} = \frac{1}{8} + \frac{3}{11} + ... + \frac{2n-1}{3n+5} + ...$$

este o serie divergentă, deoarece termenul ei general $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+5} \to \dfrac{2}{3}$.

2.1.10. Definiţie. O serie $\sum a_n$ se numeşte absolut convergentă, dacă seria $\sum |a_n|$ este o serie convergentă (notăm AC)

2.1.11. Teoremă. *Dacă o serie este absolut convergentă, atunci seria este convergentă.*

Demonstraţie. Presupunem $\sum |a_n|$, o serie convergentă. Aplicând criteriul general al lui Cauchy: $(\forall)\, \varepsilon > 0$ $(\exists)\, N(\varepsilon)$, astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dar

$$|a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Seria $\sum a_n$ este o serie convergentă.

Seriile convergente fără a fi şi absolut convergente se numesc serii semiconvergente

2.2 Serii alternante.

2.2.1. Definiţie. O serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + ... \text{ cu } b_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$$

se numeşte serie alternantă.

2.2.2. Teoremă. Criteriul lui Abel pentru serii de forma $\sum a_n b_n$. *Dacă $(b_n) \searrow 0$ (este un şir monoton descrescător de numere pozitive spre zero) şi $\sum a_n$ este o serie cu şirul sumelor parţiale $A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, mărginit, atunci, seria $\sum a_n b_n$ este convergentă*

Demonstraţie. Folosim criteriul al lui Cauchy de convergenţă a seriilor, scriem $a_n = A_n - A_{n-1}$. Avem

$$|a_{n+1}b_{n+1} + \ldots + a_{n+p}b_{n+p}| = \left| b_{n+1}\underbrace{(A_{n+1} - A_n)}_{A_{n+1}-A_n} + b_{n+2}\underbrace{(A_{n+2} - A_{n+1})}_{A_{n+2}-A_{n+1}} + \ldots + b_{n+p}\underbrace{(A_{n+p} - A_{n+p-1})}_{A_{n+p}-A_{n+p-1}} \right|$$

$$= \left| A_{n+1}\underbrace{(b_{n+1} - b_{n+2})}_{+} + A_{n+2}\underbrace{b_{n+2} - b_{n+3}}_{+} + A_{n+p-1}(b_{n+p-1} - b_{n+p}) \right| + |b_{n+1}(-A_n) + b_{n+p}A_{n+p}|$$

$$\leq M \left\{ \underline{\underline{b_{n+1}}} - \underbrace{b_{n+2} + b_{n+2}}_{0} - \underbrace{b_{n+3} + \ldots}_{0} + b_{n+p-1} - \overbrace{b_{n+p} + \underline{\underline{b_{n+1}}} + b_{n+p}} \right\} = 2b_{n+1}M$$

Deoarece $b_{n+1} \searrow 0$, folosind definiţia convergenţei spre zero, obţinem că pentru orice $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să aibă loc $b_{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, deci

$$|a_{n+1} \cdot b_{n+1} + ... + a_{n+p}b_{n+p}| < 2\, b_{n+1}M < \varepsilon$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$.

Seria $\sum a_n b_n$ verifică criteriul general al lu Cauchy, deci este convergentă.

Considerăm cazul particular al seriei lui Abel $\sum a_n b_n$, în care $a_n = (-1)^{n+1}$.

2.2.3. Teoremă. Criteriul lui Leibniz. *Dacă într-o serie alternantă $\sum (-1)^{n+1} b_n$ şirul $(b_n) \searrow^{+} 0$ (monoton descrescător de numere pozitive spre zero), atunci seria alternantă $\sum (-1)^{n+1} b_n$ este convergentă.*

Demonstraţie. Folosind criteriul lui Abel pentru cazul când

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}, \text{deci } |a_1 + a_2 + ... + a_n| < 1$$

suma parţială

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \begin{cases} 0, & n = \text{par} \\ 1, & n = \text{impar} \end{cases}$$

şi deci seria alternantă este convergentă.

2.2.4. Exemplu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + ...$$

este o serie alternantă convergentă, deoarece şirul

$$b_n = \frac{1}{n} \searrow^{+} 0.$$

Pentru a demonstra monotonia şirului $(b_n)_{n\geq 1}$, avem

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0, \;\; n \geq 1.$$

Atunci $b_{n+1} < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N},\ n > 1$.

Seria alternantă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ este un exemplu de serie semiconvergentă, deoarece seria valorilor absolute $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este o serie divergentă.(seria armonică)

2.3 Serii cu termeni pozitivi. Criterii de comparaţie

2.3.1 Criteriul I de comparaţie *Fie $\sum a_n$ şi $\sum b_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există un număr N astfel încât $(\forall)\, n \geq N$ avem*

a) $a_n \leq b_n$ şi $\sum b_n$ convergentă, atunci $\sum a_n$ convergentă;

b) $a_n \leq b_n$ şi $\sum a_n$ divergentă, atunci $\sum b_n$ divergentă.

Demonstraţie. Din $a_n \leq b_n$ pentru $n > N$ rezultă

$$A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n < b_1 + b_2 + ... + b_n = B_n.$$

Şirul sumelor parţiale B_n al seriei convergente $\sum b_n$, este un şir convergent, deci mărginit, în concluzie $(\exists)\, M > 0$ astfel încât $0 < A_n \leq B_n < MA_{n+1} = A_n + a_{n+1} > A_n \,||\!\Rightarrow$ Şirul $(A_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent (mărginit şi monoton). Urmează că şi seria $\sum a_n$ este convergentă. Punctul (b) al criteriului I se obţine prin negarea punctului a)

2.3.2 Exemplu. Studiaţi natura seriei $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Deoarece $n^\alpha < n^1$ pentru $0 < \alpha < 1$; $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$ şi seria $\sum \frac{1}{n}$ este divergentă. Va rezulta că seria $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ divergentă pentru $\alpha \in (0,1)$.

2.3.3 Exemplu. Studiaţi natura seriei $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Deoarece $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ şi seria $\sum \frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că seria $\sum \frac{1}{\ln n}$ este divergentă.

2.3.4 Criteriul II de comparaţie. *Fie $\sum a_n$ şi $\sum b_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există un număr $N \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $n \geq N$ să avem*

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ şi $\sum b_n$ convergentă, atunci $\sum a_n-$convergentă;

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ şi $\sum a_n$ divergentă, atunci $\sum b_n-$divergentă.

Demonstraţie. Putem presupune $N = 1$. Din inegalităţile $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ va rezulta

$$\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2} \geq ... \geq \frac{a_n}{b_n} \geq \dots$$

Notăm $\frac{a_1}{b_1} = k\,(\neq 0)$ şi deci

$$\begin{array}{ccc} a_1 & = & kb_1 \\ a_2 & \leq & kb_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & \leq & kbn \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Aplicăm criteriul I de comparaţie la seriile $\sum a_n$ şi $\sum kb_n$, de unde vor rezulta afirmaţiile a) şi b) din criteriul al II-lea de comparaţie.

2.3.5 Criteriul al III-lea de comparaţie. *Fie seriile* $\sum a_n$ *şi* $\sum b_n$ *cu termeni pozitivi.*
a) Dacă $(\exists)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l\,(\neq 0$ *finit), atunci seriile* $\sum a_n$ *şi* $\sum b_n$ *au aceeaşi natură;*
b) Dacă $l=0$ *şi seria* $\sum b_n$ *este convergentă, atunci* $\sum a_n$ *este convergentă;*
c) Dacă $l=\infty$ *şi seria* $\sum b_n$ *este divergentă, atunci* $\sum a_n$ *este divergentă.*

2.3.6 Exemplu. Studiaţi natura seriilor:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{10n+17}$; b) $\sum\dfrac{1}{an+b}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.
Soluţie. a) Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{10n+17}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{10}.$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{10n+17}$ este divergentă, deoarece are aceeaşi natură cu seria armonică.
b) Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{an+b}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}.$$

Seria $\sum\frac{1}{an+b}$ este divergentă, are aceeaşi natură cu seria armonică.

2.3.7 Criteriul lui D'Alembert (raportului) *Fie seriua* $\sum a_n$*, unde* $a_n>0$*. Dacă există un număr* N *astfel încât pentru orice* $n>N$ *să aibe loc:*
a) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq l<1$*, atunci seria* $\sum a_n$ *este convergentă;*
b) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geq l>1$*, atunci seria* $\sum a_n$ *este divergentă.*
Demonstraţie. a) Presupunem inegalităţile adevărate pentru $n\geq 1$, adică

$$\begin{array}{lcl} a_2 & \leq & la_1\\ a_3 & \leq & la_2\leq l^2a_1\\ \dots & \dots & \dots\\ a_n & \leq & la_{n-1}\leq\dots\leq l^{n-1}a_1 \end{array}$$

obţinem seria $\sum l^{n-1}a_1=a_1\sum l^{n-1}$, serie geometrică cu raţia l. Dacă $l<1$, aplicând criteriul I de comparaţie, rezultă că şi seria $\sum a_n$ este convergentă.
b) Din inegalităţile $a_n\geq l^{n-1}a_1$ şi seria $a_1\sum l^{n-1}$ este divergentă (serie geometrică cu raţia $l>1$). Va rezulta că şi seria $\sum a_n$ este divergentă (punctul (b) de la criteriul I de comparaţie).

2.3.8 Criteriu practic. Fie seria $\sum a_n$, cu $a_n>0$. Dacă $\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$, atunci pentru $l<1$ seria $\sum a_n$ este convergentă, pentru $l>1$ seria $\sum a_n$ este divergentă, iar pentru $l=1$ nu se poate determina natura seriei $\sum a_n$.

2.3.9 Aplicaţie. Studiaţi natura seriei

$$\sum\frac{[n!]^2a^n}{(2n)!},\quad a>0.$$

Soluţie. Avem

$$a_{n+1}=\frac{[(n+1)!]^2a^{n+1}}{[2(n+1)]!}=\frac{[n!]^2[(n+1)]^2a^n\cdot a}{(2n+2)!}=\frac{[n!]^2a^n}{(2n)!}\cdot\frac{(n+1)^2a}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a}{4}.$$

Pentru $\frac{a}{4} < 1$, adică $a < 4$ obţinem $\sum a_n$ este convergentă, pentru $a > 4$ seria $\sum a_n$ este divergentă. Dacă $a = 4$, criteriul nu este concludent şi vom aplica un alt criteriu (Raabe-Duhamel).

2.3.10 Criteriul lui Raabe-Duhamel *Fie seria $\sum a_n$, cu $a_n > 0$. Dacă există un număr N astfel încât pentru orice $n > N$*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l,$$

atunci pentru $l < 1$ seria $\sum a_n$ este divergentă, pentru $l > 1$ seria $\sum a_n$ este convergentă, iar pentru $l = 1$ criteriul nu e concludent.

2.3.11 Exemplu. Fie seria

$$\sum \frac{[n!]^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$$

din exemplul precedent (Aplicaţia 2.3.9), cu $a = 4$. Avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4\,(n+1)^2}{(2n+1)\,(2n+2)} \to 1,$$

deci criteriul raportului nu este concludent în determinarea naturii seriei. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = \lim n\left[\frac{2n+1}{2n+2} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{-1}{2n+2} = -1 < 1,$$

obţinem că pentru $a = 4$ seria $\sum \frac{a^n\,(n!)^2}{(2n)!}$ este divergentă.

2.3.12 Criteriul rădăcinii (Cauchy) criteriul practic. *Fie seria $\sum a_n$, cu $a_n > 0$. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

atunci pentru $l < 1$ seria $\sum a_n$ este convergentă, $l > 1$ seria $\sum a_n$ este divergentă, iar pentru $l = 1$ criteriul nu este concludent.

2.3.13 Observaţie. O consecintă la Lema lui Stolz arată că pentru orice şir $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Deci criteriul rădăcinii este echivalent cu criteriul lui D'Alembert.

2.3.14 Exemplu Studiaţi natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot a^n,\ a > 0.$

Soluţie. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} a\left(n + \frac{1}{n}\right)^n = a\cdot e.$$

Dacă $a < \frac{1}{e}$, atunci seria este convergentă; dacă $a > \frac{1}{e}$, atunci seria este divergentă. Dacă $a = \frac{1}{e}$ obţinem $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$. Deoarece

$$\begin{aligned}
e &\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
e^n &\leq \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
\frac{1}{e^n} &\geq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}
\end{aligned}$$

rezultă

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) n^2 \frac{1}{e^n} \geq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}, \ \ n \geq 1$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \frac{1}{e}$, deci seria $\sum a_n$ nu poate fi convergentă (termenul ei general nu tinde la zero!)

2.3.15 Criteriul de condensare (Cauchy)*Fie seria* $\sum a_n$ *având* (a_n) *având un şir monoton descrescător de numere pozitive. Atunci seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ *au aceeaşi natură.*

2.3.16 Aplicaţie. Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n^\alpha}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Seria

$$\sum 2^k \frac{l}{(2^k)^\alpha} = \sum \frac{l}{2^{k(\alpha-1)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{l}{2^{\alpha-1}}\right)^k$$

este o serie geometrică cu raţia $\frac{l}{2^{\alpha-1}}$. Dacă $\alpha > 1,\ 0 < \frac{l}{2^{\alpha-1}} < 1$ şi seria geometrică este convergentă, deci şi seria $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă.

2.3.17. Observaţie. Seria $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se numeşte seria armonică generalizată (Riemann). Concluzie:

$$\begin{cases} \text{Pentru } \alpha \leq 1 \text{ seria } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ este divergentă;} \\ \text{Pentru } \alpha > 1 \text{ seria } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ este convergentă.} \end{cases}$$

Capitolul 3

Funcţii $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

3.1 Elemente de topologie

Notăm $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Prin **vecinătate** (în $\overline{\mathbb{R}}$) **a numărului real** $x_0 \in \mathbb{R}$ înţelegem orice mulţime $W \subset \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că există $\epsilon > 0$ pentru care $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset W$.

Prin **vecinătate** (în $\overline{\mathbb{R}}$) **a lui** $+\infty$ **înţelegem** orice mulţime $W \subset \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că există $\epsilon > 0$ pentru care $(\epsilon, +\infty] \subset W$.

Prin **vecinătate** (în $\overline{\mathbb{R}}$) **a lui** $-\infty$ înţelegem orice mulţime $W \subset \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că există $\epsilon < 0$ pentru care $[-\infty, \epsilon) \subset W$.

Remarcăm că dacă mulţimea W este vecinătate pentru $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $x_0 \in W$.

Mai menţionăm că dacă W_1, W_2 sunt două vecinătăţi pentru $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci mulţimea $W_1 \cap W_2$ este de asemenea o vecinătate pentru x_0.

3.1.1 Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Un punct $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se numeşte **punct de acumulare** pentru mulţimea D, dacă pentru orice vecinătate W a punctului x_0 are loc $D \cap W \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Există posibilitatea ca anumite puncte de acumulare $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ pentru o mulţime $D \subset \mathbb{R}$ să nu fie elemente ale mulţimii D. De exemplu pentru mulţimea $D = (a, b)$ unde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, fiecare punct $x_0 \in [a, b]$ este punct de acumulare; pentru mulţimea $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ orice $x_0 \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare; pentru $D = (-2,\ 1] \cup [2,\ 3) \cup \{7,\ 8\} \cup [10, +\infty)$ punctele -2, 3 şi $+\infty$ sunt puncte de acumulare, fără a fi elemente ale lui D.

3.1.2 Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Un punct $x_0 \in D$ se numeşte **punct izolat** al mulţimii D dacă există o vecinătate W a lui x_0 astfel încât $D \cap W = \{x_0\}$.

Este clar că orice punct $x_0 \in D$ este ori punct de acumulare pentru mulţimea D, ori punct izolat al mulţimii D.

3.1.3 Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$.

i) Un punct $x_0 \in D$ se numeşte **punct interior** al mulţimii D dacă există o vecinătate W a lui x_0 astfel încât $W \subset D$.

ii) Mulţimea punctelor interioare ale mulţimii D se numeşte **interiorul lui** D.

3.1.4 Definiţie. Mulţimea $D \subset \mathbb{R}$ se numeşte **mulţime deschisă** dacă pentru orice $x_0 \in D$ există o vecinătate W a lui x_0 astfel încât $W \subset D$.

În continuare enunţăm câteva proprietăţi esenţiale ale mulţimii $\mathbb{R}$, proprietăţi care au rol şi la studiul funcţiilor $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3.1.5 Axiomă (Axioma existenţei supremumului) *Orice submulţime nevidă şi majorată a lui* $\mathbb{R}$ *are supremum (cel mai mic majorant) în* $\mathbb{R}$.

3.1.6 Axiomă (Axioma existenţei infimumului) *Orice submulţime nevidă şi minorată a lui* $\mathbb{R}$ *are infimum (cel mai mare minorant) în* $\mathbb{R}$.

Menţionăm că aceste două axiome sunt echivalente.

3.1.7 Teoremă (Teorema lui Cantor) *Dacă şirurile de numere reale* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *au următoarele proprietăţi*

i) şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ *este crescător,*

ii) şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ *este descrescător,*
iii) $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$,
iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$,
atunci cele două şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt convergente către o limită comună şi*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

3.1.8 Teoremă (Teorema lui Cesaro) *Orice şir mărginit de numere reale are un subşir convergent.*

3.2 Limita unei funcţii $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ într-un punct

Reamintim pe scurt câteva noţiuni legate de limita într-un punct a unei funcţii $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Formulăm două definiţii, echivalente între ele, una pe baza noţiunii de vecinătate şi cealaltă pe baza noţiunii de limită a unui şir de numere reale.

3.2.1 Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un punct de acumulare pentru D. Fie $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(i) Spunem că **funcţia** f **în punctul** x_0 **are limita** l, şi notăm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, dacă pentru fiecare vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui x_0 cu proprietatea că $f(D \cap U \setminus \{x_0\}) \subset V$, ceea ce revine la

$$x \in D \cap U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V;$$

(ii) (Heine) Spunem că **funcţia** f **în punctul** x_0 **are limita** l, şi notăm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, dacă oricare ar fi $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir format cu numere reale diferite de x_0 din D, având ca limită pe x_0, şirul de numere reale $(f(x_n))_{n\geq 1}$ are limita l.

Altă notaţie: $f(x) \to l$, când $x \to x_0$.

3.2.2 Observaţie. Se arată uşor că dacă funcţia f are limită în punctul x_0, atunci ea are o singură limită în acest punct. Utilizăm definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct. Dacă f în punctul x_0 ar avea două limite l_1, l_2, $l_1 \neq l_2$, atunci, considerând un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale din $D \setminus \{x_0\}$ cu limita x_0, şirul de numere reale $(f(x_n))_{n\geq 1}$ ar avea două limite diferite, l_1 şi l_2, ceea ce este imposibil.

În următoarele nouă propoziţii, utilizând caracterizări cu inegalităţi ale vecinătăţilor punctului x_0, respectiv l formulăm caracterizări ale situaţiilor când funcţia f în punctul x_0 are limita l, concret pe cele nouă cazuri posibile ale Definiţiei 3.2.1.

3.2.3 Propoziţie. *Fie funcţia* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 = -\infty$ *punct de acumulare pentru* D. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$;

(ii) pentru orice număr real $\varepsilon < 0$ *(oricât de mic ar fi) există un număr real* $\delta(\varepsilon) < 0$ *astfel încât*

$$x \in D, x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < \varepsilon.$$

3.2.4 Propoziţie. *Fie funcţia* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 = -\infty$ *punct de acumulare pentru* D *şi* $l \in \mathbb{R}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$;

(ii) pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ *(oricât de mic ar fi) există un număr real* $\delta(\varepsilon) < 0$ *astfel încât*

$$x \in D, x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

3.2.5 Propoziţie. *Fie funcţia* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 = -\infty$ *punct de acumulare pentru* D. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$;

(ii) pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ *(oricât de mare ar fi) există un număr real* $\delta(\varepsilon) < 0$, *astfel încât*

$$x \in D, x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$

3.2.6 Propoziţie. *Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$ punct de acumulare pentru D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$;

(ii) pentru orice număr real $\varepsilon < 0$ (oricât de mic ar fi) există un număr real $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$x \in D \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; f(x) < \varepsilon.$$

3.2.7 Propoziţie. *Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ punct de acumulare pentru D şi $l \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$;

(ii) pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ (oricât de mic ar fi) există un număr real $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$x \in D \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow |\, f(x) - l| < \varepsilon.$$

3.2.8 Propoziţie. *Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$ punct de acumulare pentru D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$;

(ii) pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ (oricât de mare ar fi) există un număr real $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$x \in D \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; f(x) > \varepsilon.$$

3.2.9 Propoziţie. *Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 = +\infty$ punct de acumulare pentru D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;

(ii) pentru orice număr real $\varepsilon < 0$ (oricât de mic ar fi) există un număr real $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$x \in D, x > \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; f(x) < \varepsilon.$$

3.2.10 Propoziţie. *Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 = +\infty$ punct de acumulare pentru D şi $l \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$;

(ii) pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ (oricât de mic ar fi) există un număr real $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$x \in D, x > \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow |\, f(x) - l| < \varepsilon.$$

3.2.11 Propoziţie. *Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 = +\infty$ punct de acumulare pentru D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

(ii) pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ (oricât de mare ar fi) există un număr real $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$x \in D, x > \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; f(x) > \varepsilon.$$

Următoarele teoreme pun în evidenţă câteva proprietăţi ale funcţiei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care rezultă direct din existenţa limitei funcţiei într-un punct.

3.2.12 Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un punct de acumulare pentru D. Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ are în punctul x_0 limita l şi $c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $c < l < d$, atunci există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $x \in D \cap U \setminus \{x_0\} \Rightarrow c < f(x) < d$.*

Demonstraţie. Considerăm intervalul $V = (c, d)$. Din $c < l < d$ rezultă că V este o vecinătate a lui l. Cum f are în punctul x_0 limita l, pe baza Definiţiei 3.2.1 (i) există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $x \in D \cap U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in (c, d)$.

3.2.13 Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un punct de acumulare pentru D. Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ are în punctul x_0 limita nenulă l, atunci există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât*

$$x \in D \cap U \setminus \{x_0\} \Rightarrow l \cdot f(x) > 0.$$

Demonstraţie. Dacă $l \in (-\infty, 0)$ aplicăm teorema precedentă cu $c = -\infty, d = 0$; respectiv cu $c = 0, d = +\infty$ dacă $l \in (0, +\infty)$. Dacă $l = -\infty$ sau $l = +\infty$ atunci concluzia rezulă direct din Definiţia 3.2.1 (i).

3.2.14 Definiţie. Spunem că **funcţia** $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **este mărginită** pe mulţimea nevidă $D_0 \subset D$, dacă există un interval $(c, d) \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(D_0) \subset (c, d)$, unde mulţimea $f(D_0) = \{f(x) | x \in D_0\}$ este imaginea mulţimii D_0 prin funcţia f.

3.2.15 Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un punct de acumulare pentru D. Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ are limita $l \in \mathbb{R}$ în punctul x_0, atunci există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât funcţia f este mărginită pe $D \cap U$.*

Demonstraţie. Fixăm arbitrar $c, d \in \mathbb{R}$ astfel ca $c < l < d$ şi aplicăm Teorema 3.2.12.

Următoarea teoremă se referă la existenţa limitei într-un punct a funcţiei sumă, produs, cât, respectiv a modulului funcţiei.

3.2.16 Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un punct de acumulare pentru D. Fie funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}$. Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, atunci există limitele*

i) $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_1 + l_2$;

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$;

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \frac{l_1}{l_2}$, *dacă* $l_2 \neq 0$ *şi* $g(x) \neq 0, \forall x \in D \setminus \{x_0\}$;

iv) $\lim\limits_{x \to x_0} |f|(x) = |l_1|$.

Demonstraţie. Utilizăm definiţia cu şiruri a limitei într-un punct a unei funcţii, Definiţia 3.2.1 (ii). Fie un şir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale din $D \setminus \{x_0\}$ cu limita x_0. Din $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, pe baza Definiţiei 3.2.1 (ii), rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l_1$, respectiv $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = l_2$. Utilizând proprietăţi ale şirurilor de numere reale obţinem

i) $\lim\limits_{n \to \infty} (f + g)(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = l_1 + l_2$;

ii) $\lim\limits_{n \to \infty} (f \cdot g)(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = l_1 \cdot l_2$;

iii) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f}{g}(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{l_1}{l_2}$;

iv) $\lim\limits_{n \to \infty} |f|(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} |f(x_n)| = |l_1|$;

de unde, cu privire la funcţiile $f + g, f \cdot g, \dfrac{f}{g}$ respectiv $|f|$, pe baza Definiţiei 3.2.1 (ii), urmează concluziile din teoremă.

În continuare vom considera noţiuni de limite laterale.

3.2.17 Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie.

(i) Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulţimea $D \cap (-\infty, x_0)$. Fie $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Spunem că **funcţia** f **are limita la stânga în punctul** x_0 **egală cu** l, şi notăm $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$ sau $f(x_0 - 0) = l$, dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui x_0 cu proprietatea $f(D \cap (-\infty, x_0) \cap U) \subset V$, ceea ce revine la

$$x \in D \cap (-\infty, x_0) \cap U \Rightarrow f(x) \in V.$$

(ii) Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulţimea $D \cap (x_0, +\infty)$. Fie $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Spunem că **funcţia** f **are limita la dreapta în punctul** x_0 **egală cu** l**,** şi notăm $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$ sau $f(x_0 + 0) = l$, dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui x_0 cu proprietatea $f(D \cap (x_0, +\infty) \cap U) \subset V$, ceea ce revine la

$$x \in D \cap (x_0, +\infty) \cap U \Rightarrow f(x) \in V.$$

3.2.18 Observaţie. Limita la stânga respectiv limita la dreapta se numesc limite laterale.

3.2.19 Observaţie. De fapt $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ este limita în punctul x_0, în sensul Definiţiei 3.2.1 (i), a restricţiei funcţiei f la mulţimea $D \cap (-\infty, x_0)$, iar $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ este limita în punctul x_0 a restricţiei

funcţiei f la mulţimea $D \cap (x_0, +\infty)$, în sensul Definiţiei 3.2.1 (i). Din acest motiv toate rezultatele legate de noţiunea de limită a unei funcţii într-un punct se transpun pentru limite laterale. Ca exemplu menţionăm unicitatea limitei laterale: dacă f are limită la stânga în punctul x_0, atunci f are o singură limită la stânga în punctul x_0; dacă f are limită la dreapta în punctul x_0, atunci f are o singură limită la dreapta în x_0.

Următoarea teoremă exprimă legătura dintre limita funcţiei într-un punct şi limitele laterale în acel punct ale funcţiei.

3.2.20 Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulţimea $D \cap (-\infty, x_0)$ şi în acelaşi timp pentru mulţimea $D \cap (x_0, +\infty)$.*

i) Dacă funcţia f are limită în punctul x_0, atunci funcţia f are limite laterale în punctul x_0 şi

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

ii) Dacă funcţia f în punctul x_0 are limite laterale egale $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, atunci funcţia f are limită în punctul x_0 şi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Demonstraţie. Utilizăm definiţia cu vecinătăţi a limitei funcţiei într-un punct adică Definiţia 3.2.1. (i) şi definiţia limitelor laterale.

O clasă importantă de funcţii este cea a funcţiilor monotone. Reamintim noţiunea de funcţie monotonă.

3.2.21. Definiţie. O funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte **monotonă**, dacă are una din următoarele proprietăţi:

i) $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$; în acest caz spunem că funcţia f este crescătoare;

ii) $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$; în acest caz spunem că funcţia f este descrescătoare.

Funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte **strict monotonă**, dacă are una din următoarele proprietăţi:

iii) $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; în acest caz spunem că funcţia f este strict crescătoare;

iv) $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; în acest caz spunem că funcţia f este strict descrescătoare.

Următoarele teoreme se referă la existenţa limitelor laterale în cazul funcţiilor monotone pe un interval.

3.2.22 Teoremă. *Fie $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a < b$ şi $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare. Pentru fiecare $c \in (a, b)$ are loc:*

i) Există $f(c-0), f(c+0)$ şi $f(c-0) \in \mathbb{R}, f(c+0) \in \mathbb{R}$;

ii) $f(c-0) = \sup\{f(x) | a < x < c\}, f(c+0) = \inf\{f(x) | c < x < b\}$;

iii) $f(c-0) \le f(c) \le f(c+0)$;

iv) Dacă $a < c < d < b$ atunci $f(c+0) \le f(d-0)$.

Demonstraţie. Deoarece funcţia f este crescătoare, rezultă că mulţimea $\{f(x) | a < x < c\}$ este majorată (spre exemplu de $f(c)$) şi mulţimea $\{f(x) | c < x < b\}$ este minorată (spre exemplu de $f(c)$). Mulţimea $\{f(x) | a < x < c\}$ fiind submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$, şi majorată, rezultă că admite supremum (cel mai mic majorant) în $\mathbb{R}$, $\alpha = \sup\{f(x) | a < x < c\} \in \mathbb{R}$. Mulţimea $\{f(x) | c < x < b\}$ fiind submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$, şi minorată, rezultă că admite infimum (cel mai mare minorant) în $\mathbb{R}$, $\beta = \inf\{f(x) | c < x < b\} \in \mathbb{R}$. Are loc $-\infty < \alpha \le f(c) \le \beta < +\infty$.

Demonstrăm că $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) = \alpha$. Din $\alpha = \sup\{f(x) | a < x < c\}$ rezultă că $f(x) \le \alpha, \forall x \in (a, c)$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $u \in (a, c)$ cu proprietatea $f(u) > \alpha - \varepsilon$. Ţinând cont şi de monotonia funcţiei f pentru fiecare $x \in (u, c)$ avem $\alpha - \varepsilon < f(u) \le f(x) \le \alpha < \alpha + \varepsilon$. Prin urmare pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$x \in (a, c), |x - c| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

şi anume $\delta(\varepsilon) = c - u$. Aşadar $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) = \alpha$.

Cu un raţionament asemănător obţinem $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x) = \beta$.

În acest moment avem demonstrate egalităţile

$$f(c-0) = \sup \{ f(x) | \, a < x < c \}, \; f(c+0) = \inf \{ f(x) | \, c < x < b \}$$

şi concluziile i), ii) ale teoremei. În continuare pe baza monotoniei funcţiei f rezultă inegalităţile din iii).

Pentru a demonstra iv) considerăm x astfel încât $c < x < d$. Rezultă că $f(c+0) \leq f(x) \leq f(d-0)$ şi deci $f(c+0) \leq f(d-0)$.

În mod asemănător se demonstrează următoarea teoremă.

3.2.23 Teoremă. *Fie $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, a < b$ şi $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie descrescătoare. Pentru fiecare $c \in (a,b)$ are loc:*

i) Există $f(c-0), f(c+0)$ şi $f(c-0) \in \mathbb{R}, f(c+0) \in \mathbb{R}$;

ii) $f(c-0) = \inf \{ f(x) | \, a < x < c \}, f(c+0) = \sup \{ f(x) | \, c < x < b \}$;

iii) $f(c-0) \geq f(c) \geq f(c+0)$;

iv) Dacă $a < c < d < b$ atunci $f(c+0) \geq f(d-0)$.

3.2.24. Observaţie. i) Dacă $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ şi funcţia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ este monotonă, atunci există $f(a+0)$.

ii) Dacă $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ şi funcţia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ este monotonă, atunci există $f(b-0)$.

Următoarea teoremă conţine o tehnică frecvent utilizată la calculul limitelor de funcţii.

3.2.25 Teoremă (Criteriul majorării) *Fie $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un punct de acumulare pentru D şi $l \in \mathbb{R}$. Dacă*

i) există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $|f(x) - l| \leq g(x), \forall x \in D \cap U \setminus \{x_0\}$;

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir arbitrar de numere reale din $D \cap U \setminus \{x_0\}$, cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Pe baza ipotezei i) rezultă $|f(x_n) - l| \leq g(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Din ii) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ şi Definiţia 3.2.1 (ii) rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = 0$. Deducem că şirul de numere reale $(f(x_n))_{n \geq 1}$ are limta l; $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$. Utilizând din nou Definiţia 3.2.1 (ii) rezultă că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

3.2.26 Exemplu. Pentru $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} \sin x, x_0 = +\infty, l = 0$ avem

i) $|f(x) - l| = \left| \dfrac{1}{x} \sin x - 0 \right| = \left| \dfrac{1}{x} \right| \cdot |\sin x| \leq \dfrac{1}{x} \cdot 1 = \dfrac{1}{x}, \forall x \in (0, +\infty)$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

aşadar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \sin x = 0$.

Următoarea teoremă se referă la două funcţii comparate pe o vecinătate a punctului x_0 printr-o inegalitate.

3.2.27 Teoremă (Trecerea la limită într-o inegalitate) *Fie $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii şi $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un punct de acumulare pentru D. Dacă*

i) funcţiile f şi g au limită în punctul x_0,

ii) există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(x) \leq g(x), \forall x \in D \cap U \setminus \{x_0\}$,

atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale din $D \cap U \setminus \{x_0\}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Din ipoteza i) şi Definiţia 3.2.1. (ii) a limitei funcţiei într-un punct rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, respectiv $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Conform ipotezei ii) are loc $f(x_n) \leq g(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde, cu privire la şirurile de numere reale $(f(x_n))_{n \geq 1}, (g(x_n))_{n \geq 1}$ rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leq \lim\limits_{n \to \infty} g(x_n)$. Aşadar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

3.2.28 Observaţie. Atragem atenţia asupra faptului că din ipoteza i) şi comparaţia $f(x) < g(x)$, $\forall x \in D \cap U \setminus \{x_0\}$, nu rezultă inegalitatea strictă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

3.2.29 Exemplu. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^4}$. Avem $f(x) < g(x)$ pentru orice $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, iar $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$.

3.3 Funcţii $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue într-un punct

Începem cu definiţia noţiunii de continuitate a unei funcţii într-un punct bazată pe noţiunea de vecinătate.

3.3.1 Definiţie. Funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte **continuă în punctul** $x_0 \in D$ dacă pentru fiecare vecinătate V a punctului $f(x_0)$ există o vecinătate U a punctului x_0 cu proprietatea $f(D \cap U) \subset V$, ceea ce revine la

$$x \in D \cap U \;\Rightarrow\; f(x) \in V.$$

Dacă funcţia f nu este continuă în punctul x_0, atunci spunem că f este discontinuă în x_0.

3.3.2 Observaţie. Subliniem faptul că noţiunea de continuitate (respectiv discontinuitate) a funcţiei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ într-un punct x_0 are sens numai pentru puncte x_0 care aparţin mulţimii de definiţie D a funcţiei f.

Următoarea teoremă ne oferă caracterizări ale funcţiilor continue într-un punct.

3.3.3 Teoremă. *Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi punctul $x_0 \in D$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) Funcţia f este continuă în punctul x_0;

(ii) Pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ (oricât de mic ar fi) există un număr real $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$x \in D, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

(iii) Pentru orice şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ format cu elemente din D, convergent către x_0, şirul valorilor corespunzătoare $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent către $f(x_0)$.

Demonstraţie. Presupunem (i) funcţia f continuă în punctul x_0 şi demonstrăm (ii).

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Considerăm intervalul deschis $V = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Intervalul V fiind o vecinătatea a punctului $f(x_0)$ şi funcţia f fiind continuă în punctul x_0, pe baza Definiţiei 3.3.1. există o vecinătatea U a punctului x_0 astfel încât

$$x \in D \cap U \;\Rightarrow\; f(x) \in V.$$

Deoarece U este o vecinătate a punctului x_0, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca $(x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)) \subset U$. Dacă $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ atunci rezultă $-\delta(\varepsilon) < x - x_0 < \delta(\varepsilon) \Rightarrow x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0 + \delta(\varepsilon) \Rightarrow x \in (x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)) \Rightarrow x \in U.$

Astfel $x \in D, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow x \in D, x \in U \Rightarrow x \in D \cap U \Rightarrow f(x) \in V = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Aşadar pentru $\varepsilon > 0$ luat arbitrar, există $\delta(\varepsilon) > 0$ cu proprietatea că

$$x \in D, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

şi deci (ii) are loc.

Presupunem (ii) şi demonstrăm (iii). Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir arbitrar de numere reale format cu elemente din D, convergent către x_0. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Conform (ii) există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$x \in D, |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are limita x_0, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - x_0| < \delta(\varepsilon), \forall n > n_\varepsilon$. Pe baza implicaţiei precedente rezultă că $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon$, ceea ce înseamnă că şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent către $f(x_0)$. Deci (iii) are loc.

Demonstrăm că (iii) implică (i). Raţionăm prin reducere la absurd. Considerăm (iii) adevărată. Presupunem că (i) nu are loc, deci că funcţia f nu este continuă în punctul x_0. Atunci există o vecinătate V a punctului $f(x_0)$ cu proprietatea că pentru orice vecinătate U a punctului x_0 există $x \in D \cap U$ cu $f(x) \notin V$. În particular, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ intervalul $U_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ fiind o vecinătate a lui x_0, există $x_n \in D \cap U_n$ cu $f(x_n) \notin V$. Din $x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent către x_0, iar din $f(x_n) \notin V, \forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că şirul de numere reale $(f(x_n))_{n\geq 1}$ nu converge către $f(x_0)$. Contradicţie cu (iii). Presupunerea noastră duce la contradicţie, deci este incorectă; rezultă că (i) are loc, adică funcţia f este continuă în punctul x_0.

Următoarele două teoreme se referă la două cazuri particulare importante ale Definiţiei 3.3.1.

3.3.4 Teoremă. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in D$. Dacă x_0 este punct izolat al lui D, atunci funcţia f este continuă în x_0.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in D$ punct izolat al lui D. Înseamnă că există o vecinătate W a punctului x_0 astfel încât $D \cap W = \{x_0\}$. Deducem că pentru orice vecinătate V a punctului $f(x_0)$ există o vecinătate U a lui x_0, anume $U = W$, astfel încât $f(D \cap U) \subset V$, şi deci, pe baza Definiţiei 3.3.1, f este continuă în punctul x_0. Am ţinut cont de $D \cap U = \{x_0\} \Rightarrow f\ (D \cap U) = \{f(x_0)\}$ şi de incluziunea $\{f(x_0)\} \subset V$ care are loc deoarece V este o vecinătate a lui $f(x_0)$ şi deci $f(x_0) \in V$.

3.3.5 Exemplu. Fie dat (x_n) un şir de numere reale. Înseamnă că avem definită funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Considerăm un element $n \in \mathbb{N}$. Deoarece n este punct izolat al mulţimii de definiţie $\mathbb{N}$, funcţia f este continuă în punctul n.

3.3.6 Teoremă. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in D$. Dacă x_0 este punct de acumulare pentru D, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*

(i) *Funcţia f este continuă în punctul x_0.*

(ii) *Există limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Demonstraţie. Demonstrăm că (i) implică (ii). Dacă f este continuă în x_0, atunci conform Definiţiei 3.3.1, pentru orice vecinătate V a lui $f(x_0)$ există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(D \cap U) \subset V$. Atunci $f(D \cap U \setminus \{x_0\}) \subset V$ are loc, ceea ce, pe baza Definiţiei 3.2.1 (i), înseamnă că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Demonstrăm că (ii) implică (i). Din $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ şi Definiţia 3.2.1 (i) rezultă că pentru orice vecinătate V a lui $f(x_0)$ există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(D \cap U \setminus \{x_0\}) \subset V$. Dar $f(x_0) \in V$ deoarece V este o vecinătate lui $f(x_0)$, şi deci $f(D \cap U) \subset V$. Pe baza Definiţiei 3.3.1 funcţia f este continuă în x_0.

3.3.7 Observaţie. Teoremele 3.3.4 şi 3.3.6 arată că funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă şi numai dacă are loc una din următoarele situaţii

(i) Punctul $x_0 \in D$ este punct izolat al mulţimii D.

(ii) Punctul $x_0 \in D$ este punct de acumulare pentru mulţimea D şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Următoarele două teoreme evidenţiază proprietăţi remarcabile ale funcţiilor continue într-un punct.

3.3.8 Teoremă. *Dacă funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in D$ şi dacă $f(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate U a punctului x_0 cu proprietatea că pentru orice $x \in D \cap U$ valorile $f(x)$ sunt de acelaşi semn cu valoarea $f(x_0)$.*

Demonstraţie. Din $f(x_0) \neq 0$ rezultă că $|f(x_0)| > 0$. Considerăm intervalul

$$V = \left(f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2}, f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}\right).$$

Acesta fiind o vecinătatae a punctului $f(x_0)$, şi deoarece funcţia f este continuă în punctul x_0, pe baza Definiţiei 3.3.1 deducem existenţa unei vecinătăţi U a punctului x_0 astfel încât

$$x \in U \cap D \ \Rightarrow\ f(x) \in \left(f(x_0) - \tfrac{|f(x_0)|}{2}, f(x_0) + \tfrac{|f(x_0)|}{2}\right).$$

Dacă $f(x_0) < 0$, atunci $\left(f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2}, f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}\right) \subset (-\infty, 0)$ şi deci pentru $x \in D \cap U$ rezultă că $f(x) < 0$. Dacă $f(x_0) > 0$, atunci $\left(f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2}, f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}\right) \subset (0, +\infty)$ şi deci pentru $x \in D \cap U$ rezultă că $f(x) > 0$.

3.3.9 Teoremă. *Dacă funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in D$, atunci există o vecinătate U a punctului x_0 cu proprietatea că f este mărginită pe $D \cap U$.*

Demonstraţie. Considerăm intervalul $(f(x_0) - 1, f(x_0) + 1)$. Acesta este o vecinătate a punctului $f(x_0)$. Deoarece funcţia f este continuă în punctul x_0, pe baza Definiţiei 3.3.1 există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât

$$f(D \cap U\ ) \subset (f(x_0) - 1, f(x_0) + 1),$$

de unde rezultă că funcţia f este mărginită pe $D \cap U$.

În continuare considerăm noţiuni de continuitate laterală.

3.3.10 Definiţie. Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie.

i) Dacă $x_0 \in D$ este un punct de acumulare pentru mulţimea $D \cap (-\infty, x_0)$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$ atunci spunem că **funcţia f în punctul x_0 este continuă la stânga**.

ii) Dacă $x_0 \in D$ este un punct de acumulare pentru mulţimea $D \cap (x_0, +\infty)$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$ atunci spunem că **funcţia f în punctul x_0 este continuă la dreapta.**

3.3.11 Teoremă. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie. Fie $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru mulţimea $D \cap (-\infty, x_0)$ şi pentru mulţimea $D \cap (x_0, +\infty)$. Funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.*

Demonstraţie. Aplicăm Teorema 3.3.6 de caracterizare a continuităţii funcţiei într-un punct de acumulare cu ajutorul limitei funcţiei şi Teorema 3.2.20 care arată legătura dintre limita într-un punct a funcţiei şi limitele laterale în acel punct ale funcţiei.

3.3.12 Observaţie. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. În punctul $x_0 = a$ continuitatea funcţiei f (în sensul Definiţiei 3.3.1) revine la continuitatea la dreapta în punctul $x_0 = a$ a funcţiei f. În punctul $x_0 = b$ continuitatea funcţiei f (în sensul Definiţiei 3.3.1) revine la continuitatea la stânga în $x_0 = b$ a funcţiei f.

Următoarele două teoreme se referă la continuitatea într-un punct a funcţiei sumă, produs, cât, a modulului funcţiei, respectiv a funcţiei compuse. Teoremele arată că proprietatea de continuitate într-un punct se transmite prin operaţiile precizate.

3.3.13 Teoremă.

i) *Dacă funcţiile $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt continue în punctul $x_0 \in D$, atunci funcţia sumă $f + g$ este continuă în punctul x_0.*

ii) *Dacă funcţiile $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt continue în punctul $x_0 \in D$, atunci funcţia produs $f \cdot g$ este continuă în punctul x_0.*

iii) *Dacă $c \in \mathbb{R}$ şi dacă funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in D$, atunci funcţia $c \cdot f$ este continuă în punctul x_0.*

iv) *Dacă funcţiile $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt continue în punctul $x_0 \in D$ şi dacă $g(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate U a punctului x_0 cu proprietatea că restricţia funcţiei cât $\dfrac{f}{g}$ la $D \cap U$ este continuă în punctul x_0.*

v) *Dacă funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in D$, atunci funcţia $|f|$ este continuă în punctul x_0.*

Demonstraţie. Dacă x_0 este punct izolat al mulţimii D, atunci toate funcţiile menţionate sunt continue în x_0 pe baza Teoremei 3.3.4.

Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare pentru mulţimea D, atunci utilizăm Teorema 3.3.3 (iii) şi proprietăţile şirurilor de numere reale. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir arbitrar de numere reale din D convergent către x_0.

Din continuitatea funcţiilor f şi g în punctul x_0 pe baza Teoremei 3.3.3 deducem că şirul de numere reale $(f(x_n))_{n \geq 1}$ este convergent către $f(x_0)$, respectiv şirul de numere reale $(g(x_n))_{n \geq 1}$ este convergent către $g(x_0)$.

i) Cum şirul de numere reale $((f + g)(x_n))_{n \geq 1} = (f(x_n) + g(x_n))_{n \geq 1}$ este convergent către $f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$, pe baza Teoremei 3.3.3 funcţia $f + g$ este continuă în punctul x_0.

ii) Cum şirul de numere reale $((f \cdot g)(x_n))_{n \geq 1} = (f(x_n) \cdot g(x_n))_{n \geq 1}$ este convergent către $f(x_0) \cdot g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$, pe baza Teoremei 3.3.3 funcţia $f \cdot g$ este continuă în punctul x_0.

iii) Din punctul ii), în cazul când funcţia g este funcţia constantă $g(x) = c, \forall x \in D$, obţinem iii).

iv) Dacă funcţia g este continuă în punctul $x_0 \in D$ şi $g(x_0) \neq 0$, utilizând Teorema 3.2.13 deducem că există o vecinătate U a punctului x_0 cu proprietatea că $x \in D \cap U \Rightarrow g(x) \neq 0$ (de fapt $g(x)$ are semnul valorii $g(x_0)$).

Considerăm funcţia cât $\dfrac{f}{g}$ restricţionată la mulţimea $D \cap U$. Fie acum $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir arbitrar de numere reale din $D \cap U$ convergent către x_0. Deoarece funcţiile f şi g sunt continue în punctul

$x_0 \in D \cap U$, pe baza Teoremei 3.3.3 şirul de numere reale $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent către $f(x_0)$, respectiv şirul de numere reale nenule $(g(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent către $g(x_0)$. Rezultă că şirul de numere reale $\left(\frac{f}{g}(x_n)\right)_{n\geq 1} = \left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)_{n\geq 1}$ este convergent către $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f}{g}(x_0)$, aşadar pe baza Teoremei 3.3.3 funcţia $\frac{f}{g} : D \cap U \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul x_0.

v) Cum şirul de numere reale $(|f|(x_n))_{n\geq 1} = (|f(x_n)|)_{n\geq 1}$ este convergent către $|f(x_0)|$, pe baza Teoremei 3.3.3 funcţia $|f|$ este continuă în punctul x_0.

3.3.14 Teoremă. *Dacă funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in D$ şi dacă funcţia $g : f(D) \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $y_0 = f(x_0)$, atunci funcţia compusă $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul x_0.*

Demonstraţie. Dacă x_0 este punct izolat al mulţimii D, atunci pe baza Teoremei 3.3.4 funcţia $g \circ f$ este continuă în x_0. Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare pentru D atunci utilizăm Teorema 3.3.3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir arbitrar de numere reale din D convergent către x_0. Deoarece funcţia f este continuă în punctul x_0, pe baza Teoremei 3.3.3 deducem că şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent către $f(x_0)$. Deoarece şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, unde $y_n = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$, este format cu numere reale din mulţimea de definiţie $f(D)$ a funcţiei g, şi după cum s-a văzut acest şir este convergent către $f(x_0) = y_0 \in f(D)$, din continuitatea funcţiei g în punctul y_0, cu Teorema 3.3.3, deducem că şirul $(g(y_n))_{n\geq 1}$ este convergent către $g(y_0)$. Dar $g(y_n) = g(f(x_n)) = (g \circ f)(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$, deci şirul $((g \circ f)(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent către $(g \circ f)(x_0)$. Pe baza Teoremei 3.3.3 rezultă că funcţia $g \circ f$ este continuă în punctul x_0.

3.4 Funcţii $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue pe o mulţime

3.4.1 Definiţie. Spunem că funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe mulţimea nevidă $D_0 \subset D$, dacă funcţia f este continuă în fiecare punct $x_0 \in D_0$.

Dacă f este continuă pe mulţimea de definiţie D, atunci spunem că funcţia f este continuă.

3.4.2 Exemplu. Fie (x_n) un şir dat de numere reale. Funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ este continuă pe $\mathbb{N}$.

Într-adevăr, fiecare $n \in \mathbb{N}$ este punct izolat al mulţimii $\mathbb{N}$, deci în fiecare punct $n \in \mathbb{N}$ funcţia f este continuă. Am utilizat Teorema 3.3.4.

3.4.3 Teoremă. *Funcţiile* $c, |x|, x^\alpha$, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}x$, $\mathrm{arcctg}x$ *sunt continue pe mulţimea maximă de definiţie.*

Demonstraţie. Se utilizează (iii) din Teorema 3.3.3 pentru fiecare funcţie în parte.

3.4.4 Teoremă. *Fie funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Considerăm funcţiile $h, H : I \to \mathbb{R}$, $h = \min\{f, g\}, H = \max\{f, g\}$. Dacă funcţiile f, g sunt continue pe I, atunci funcţiile h, H sunt continue pe I.*

Demonstraţie. Utilizăm exprimările $h = \frac{f + g - |f - g|}{2}, H = \frac{f + g + |f - g|}{2}$.

Funcţiile f, g fiind continue pe I, ele sunt continue în fiecare $x_0 \in I$; aplicând Teorema 3.3.13, pentru fiecare $x_0 \in I$ în parte, rezultă că funcţiile $\frac{f + g - |f - g|}{2} = h$, respectiv $\frac{f + g + |f - g|}{2} = H$ sunt continue în fiecare $x_0 \in I$, şi deci sunt continue pe I.

3.4.5 Observaţie. Pe baza teoremei precedente, prin inducţie matematică, din continuitatea funcţiilor f_1, f_2, $\ldots$, f_n pe I se obţine continuitatea funcţiilor $h = \min\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $H = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ pe I.

Următoarea teoremă stabileşte mărginirea funcţiilor continue pe un interval închis.

3.4.6 Teoremă (Teorema lui Weierstrass) *Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, atunci*

i) funcţia f este mărginită pe $[a, b]$;

ii) funcţia f îşi atinge infimumul şi supremumul pe $[a, b]$, adică există $x_* \in [a, b]$ astfel încât $f(x_*) = \inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$ şi există $x^* \in [a, b]$ astfel încât $f(x^*) = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$.

Demonstraţie. i) Vom raţiona prin reducere la absurd. Considerăm funcţia f continuă pe mulţimea $[a, b]$. Presupunem că funcţia f nu este mărginită pe $[a, b]$. Atunci pentru orice interval $(-n, n) \subset \mathbb{R}$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_n \in [a,b]$ cu proprietatea că $f(x_n) \notin (-n,n)$. Din $|f(x_n)| \geq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că şirul de numere reale $(|f(x_n)|)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$.

Deoarece elementele şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ sunt numere reale din intervalul $[a,b]$, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit şi deci are un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergent. Notăm cu x_0 limita acestui subşir. Din $x_{n_k} \in [a,b], \forall k \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $x_0 \in [a,b]$. Funcţia f fiind continuă pe $[a,b]$, ea este continuă în fiecare punct al intervalului, deci şi în punctul x_0. Pe baza Teoremei 3.3.3 rezultă că şirul de numere reale $(f(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ este convergent către $f(x_0)$. Prin urmare şirul valorilor absolute $(|f(x_{n_k})|)_{k\geq 1}$ este convergent către $|f(x_0)|$. Contradicţie. Rezultă că funcţia f este mărginită pe $[a,b]$.

ii) Considerăm funcţia f continuă pe $[a,b]$. Cu i) deducem că f este mărginită pe $[a,b]$, deci există $(c,d) \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f([a,b]) = \{f(x) | x \in [a,b]\} \subset (c,d)$. Evident mulţimea $\{f(x) | x \in [a,b]\}$ este nevidă deoarece $a < b$. Mulţimea $\{f(x) | x \in [a,b]\}$ fiind submulţime nevidă şi mărginită a lui $\mathbb{R}$, are infimum (cel mai mare minorant) şi supremum (cel mai mic majorant) în $\mathbb{R}$: există $m = \inf\{f(x) | x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$ şi există $M = \sup\{f(x) | x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$.

Arătăm că există $x_* \in [a,b]$ astfel încât $f(x_*) = m$. Raţionăm prin reducere la absurd. Presupunem că nu există $x_* \in [a,b]$ astfel încât $f(x_*) = m$. Atunci, ţinând cont de proprietatea infimumului, are loc $f(x) > m, \forall x \in [a,b]$. Funcţia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x) - m}$ este pozitivă, pe baza Teoremei 3.3.13 este continuă pe $[a,b]$, şi utilizând i) rezultă că g este mărginită pe $[a,b]$. Prin urmare există $\alpha > 0$ astfel încât $0 < \dfrac{1}{f(x) - m} < \alpha, \forall x \in [a,b]$. Deducem că $f(x) > m + \dfrac{1}{\alpha}, \forall x \in [a,b]$, inegalitate ce contrazice calitatea lui $m = \inf\{f(x) | x \in [a,b]\}$ de a fi cel mai mare minorant al mulţimii $\{f(x) | x \in [a,b]\}$. Rezultă că există $x_* \in [a,b]$ astfel ca $f(x_*) = m = \inf\{f(x) | x \in [a,b]\}$.

În mod asemănător se arată că există $x^* \in [a,b]$ cu proprietatea că $f(x^*) = \sup\{f(x) | x \in [a,b]\}$.

3.4.7 Observaţie. În ipotezele teoremei elementul $x_* \in [a,b]$ are proprietatea că $f(x_*) \leq f(x)$, pentru orice $x \in [a,b]$, iar $x^* \in [a,b]$ are proprietatea că $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in [a,b]$.

Următoarea teoremă fundamentează o importantă metodă de aproximare a soluţiilor ecuaţiilor, metodă numită **metoda înjumătăţirii intervalului**.

3.4.8 Teoremă (Teorema lui Bolzano-Cauchy) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există cel puţin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$.*

Demonstraţie. Numerele $f(a), f(b)$ au semnele contrare. Construim şirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ astfel: $a_1 = a, b_1 = b$ şi $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ la mijlocul intervalului $[a_1, b_1]$. Deoarece $f(a_1)$ şi $f(b_1)$ au semnele contrare, cel puţin una din următoarele două situaţii are loc: $f(a_1) \cdot f(c_1) \leq 0$, $f(c_1) \cdot f(b_1) \leq 0$; dacă are loc prima, atunci definim $a_2 = a_1, b_2 = c_1$, iar în caz contrar definim $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$, după care considerăm $c_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ la mijlocul intervalului $[a_2, b_2]$. Deoarece $f(a_2) \cdot f(b_2) \leq 0$, cel puţin una din următoarele două situaţii are loc: $f(a_2) \cdot f(c_2) \leq 0, f(c_2) \cdot f(b_2) \leq 0$; dacă are loc prima, atunci definim $a_3 = a_2, b_3 = c_2$, iar în caz contrar definim $a_3 = c_2, b_3 = b_2$; după care considerăm $c_3 = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$ la mijlocul intervalului $[a_3, b_3]$. Continuăm procedura tot la fel.

Şirurile $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ astfel definite au următoarele proprietăţi:

i) $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}^*$

ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

iii) $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicând Teorema lui Cantor rezultă că cele două şiruri $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ sunt covergente către o limită comună pe care o notăm c. Ţinând cont de i) rezultă că $c \in [a,b]$. Funcţia f fiind continuă pe $[a,b]$, este continuă în punctul c, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$. Obţinem

$$\lim_{n\to\infty} (f(a_n) \cdot f(b_n)) = f^2(c)$$

şi, pe baza iii), $f^2(c) \leq 0$. De aici rezultă că $f(c) = 0$. Dar $c \neq a$ şi $c \neq b$ deoarece $f(a) \cdot f(b) < 0$, aşadar $c \in (a,b)$.

3.4.9 Observaţie. În ipotezele teoremei ecuaţia $f(x) = 0$, $x \in (a,b)$ are cel puţin o soluţie.

Dacă intervalul (a, b) conţine o singură soluţie a ecuaţiei, x_0, aceasta se poate aproxima prin $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$, eroarea comisă fiind $|x_0 - c_1| \leq \dfrac{b-a}{2}$; pentru a obţine o aproximare mai bună pentru x_0, calculăm c_2 ca mai sus (în demonstraţia teoremei), eroarea aproximării $x_0 \approx c_2$ fiind $|x_0 - c_2| \leq \dfrac{b-a}{2^2}$; dacă dorim o aproximare şi mai bună pentru x_0, calculăm c_3 ca mai sus (în demonstraţia teoremei), eroarea aproximării $x_0 \approx c_3$ fiind $|x_0 - c_3| \leq b - a2^3$; continuând în acelaşi mod se poate ajunge la o aproximaţie oricât de bună, în sensul de eroare oricât de mică, a soluţiei x_0 unică în intervalul (a, b) a ecuaţiei considerate. Metoda descrisă aici se numeşte metodaînjumătăţirii intervalului.

Următoarea teoremă pune în evidenţă una dintre cele mai importante proprietăţi ale funcţiilor continue pe un interval.

3.4.10 Definiţie. Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $I \subset D$ un interval. Spunem că **funcţia f are proprietatea lui Darboux pe intervalul** I dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ şi orice număr y cuprins strict între valorile $f(x_1), f(x_2)$ există cel puţin un punct $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $y = f(c)$.

3.4.11 Teoremă (Teorema lui Bolzano-Darboux) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă funcţia f este continuă pe intervalul I, atunci funcţia f are proprietatea lui Darboux pe I.*

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ şi y_0 cuprins strict între valorile $f(x_1), f(x_2)$. Atunci $(f(x_1) - y_0) \cdot (f(x_2) - y_0) < 0$. Definim funcţia $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - y_0$. Inegalitatea precedentă se scrie $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$. Din continuitatea funcţiei f şi Teorema 3.3.13 rezultă că funcţia g este continuă pe $[a, b]$, deci şi pe $[x_1, x_2]$. Pe baza teoremei lui Bolzano-Cauchy există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $g(c) = 0$ adică astfel încât $f(c) - y_0 = 0$, deci $f(c) = y_0$.

3.4.12 Observaţie. Reciproca teoremei nu are loc. Există funcţii care au proprietatea lui Darboux pe un interval şi nu sunt continue pe acel interval.

3.4.13 Exemplu. Fie $\lambda \in [-1, 1]$. Funcţia $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ \lambda, & \text{dacă} \quad x = 0 \end{cases}$$

are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$ şi nu este continuă pe $\mathbb{R}$.

Următoarea teoremă ne oferă caracterizări pentru funcţii care au proprietatea lui Darboux pe un interval.

3.4.14 Teoremă. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $I \subset D$ un interval. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) Funcţia f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I.

(ii) Oricare ar fi $J \subset I$ un interval, mulţimea $f(J)$ este interval.

(iii) Oricare ar fi $a, b \in I, a < b$, mulţimea $f([a, b])$ este interval.

Demonstraţie. Arătăm că (i) implică (ii). Presupunem că f are proprietatea lui Darboux pe I. Fie $J \subset I$ un interval. Pentru a arăta că $f(J)$ este interval, considerăm arbitrar $y_1, y_2 \in f(J)$ cu $y_1 < y_2$, urmând ca despre fiecare $y \in (y_1, y_2)$ să arătăm că $y \in f(J)$. Din $y_1, y_2 \in f(J)$ rezultă că există $x_1, x_2 \in J$ cu $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Mai departe, pe baza proprietăţii lui Darboux a funcţiei f deducem că există c situat strict între x_1, x_2 astfel încât $f(c) = y$; prin urmare $y \in f(J)$. Aşadar $f(J)$ este interval.

Este evident că afirmaţia (ii) implică (iii).

Arătăm că (iii) implică (i). Presupunem că (iii) este adevărată şi demonstrăm că f are proprietatea lui Darboux pe I. Fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ şi un număr y cuprins strict între valorile $f(x_1), f(x_2)$. Mulţimea $f([x_1, x_2])$, pe baza afirmaţiei (iii) fiind interval, rezultă că $y \in f([x_1, x_2])$. Acest lucru înseamnă că există $c \in [x_1, x_2]$ astfel încât $f(c) = y$. Cum $y \neq f(x_1), y \neq f(x_2)$ deducem că $c \neq x_1, c \neq x_2$ şi deci $c \in (x_1, x_2)$. Prin urmare f are proprietatea lui Darboux pe I.

3.4.15 Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci oricare ar fi un interval $J \subset I$, mulţimea $f(J)$ este interval.*

Demonstraţie. Pe baza teoremei lui Bolzano-Darboux funcţia continuă $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe I. Aplicând (ii) din teorema precedentă se obţine concluzia.

Următoarea teoremă ne arată că proprietatea lui Darboux se transmite prin operaţia de compunere a funcţiilor.

3.4.16 Teoremă. *Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale şi $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I, g are proprietatea lui Darboux pe intervalul J şi $f(I) \subset J$, atunci funcţia $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I.*

Demonstraţie. Arătăm că pentru orice interval $I_1 \subset I$ mulţimea $(g \circ f)(I_1)$ este interval. Atunci, pe baza Teoremei 3.4.14, rezultă că funcţia $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I. Fie $I_1 \subset I$ un interval arbitrar. Deoarece f are proprietatea lui Darboux pe I, pe baza Teoremei 3.4.14, mulţimea $f(I_1)$ este interval. Evident $f(I_1) \subset f(I)$. Având $f(I) \subset J$ deducem că $f(I_1) \subset J$. Deoarece funcţia g are proprietatea lui Darboux pe J, rezultă că mulţimea $g(f(I_1))$ este interval. Dar $g(f(I_1)) = (g \circ f)(I_1)$, deci mulţimea $(g \circ f)(I_1)$ este interval.

În mod evident orice funcţie strict monotonă este injectivă, însă nu toate funcţiile injective sunt strict monotone. Următoarea teoremă arată că în cazul funcţiilor cu proprietatea lui Darboux pe un interval injectivitatea funcţiei implică monotonia strictă a ei.

3.4.17 Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux pe I. Funcţia f este injectivă dacă şi numai dacă f este strict monotonă.*

Demonstraţie. Dacă funcţia f este strict monotonă atunci în mod evident este injectivă.

Fie funcţia f cu proprietatea lui Darboux şi injectivă. Să arătăm că f este strict monotonă. Raţionăm prin reducere la absurd. Presupunem că f nu este şi strict monotonă. Atunci există $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ astfel încât $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ sau $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Ne ocupăm de prima situaţie, a doua se discută în mod asemănător. Fie deci $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$. Comparaţia între $f(x_1)$ şi $f(x_3)$ induce trei cazuri $f(x_1) < f(x_3)$, $f(x_3) < f(x_1)$, respectiv $f(x_1) = f(x_3)$ pe care le analizăm pe rând.

i) Dacă $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$: cum f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I, există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_3) = f(c)$. Însă $c < x_2 < x_3$, deci $x_3 \neq c$, contradicţie cu proprietatea de injectivitate a funcţiei f.

ii) Dacă $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$: cum f are proprietatea lui Darboux pe I, există $c \in (x_2, x_3)$ astfel încât $f(x_1) = f(c)$. Însă $x_1 < x_2 < c$, deci $x_1 \neq c$, contradicţie cu proprietatea de injectivitate a funcţiei f.

iii) $f(x_1) = f(x_3) < f(x_2)$: egalitatea $f(x_1) = f(x_3)$ unde $x_1 \neq x_3$ este în contradicţie cu proprietatea de injectivitate a funcţiei f.

Presupunerea noastră duce la contradicţie, deci este incorectă. Aşadar f este strict monotonă.

3.4.18 Teoremă. *Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval nedegenerat şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe I. Funcţia f este injectivă dacă şi numai dacă f este strict monotonă.*

Demonstraţie. Funcţia f este continuă pe I. Rezultă că f are proprietatea lui Darboux pe I, aşadar este aplicabilă teorema precedentă.

În continuare arătăm că prin operaţia de inversare a funcţiilor se transmite proprietatea de continuitate pe interval. Vom avea nevoie de următoarea teoremă care este chiar evidentă.

3.4.19 Teoremă. *O funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to E \subset \mathbb{R}$ bijectivă este strict crescătoare (strict descrescătoare) dacă şi numai dacă funcţia inversă $f^{-1} : E \to D$ este strict crescătoare (strict descrescătoare).*

3.4.20 Teoremă. *Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale. Fie $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă. Atunci funcţia inversă $f^{-1} : J \to I$ este continuă.*

Demonstraţie. Funcţia f fiind bijectivă, este injectivă. Fiind şi continuă, pe baza Teoremei 3.4.18 rezultă că funcţia f este strict monotonă. Considerăm că f este strict crescătoare (cazul f descrescătoare se discută în mod asemănător). Pe baza Teoremei 3.4.19 şi funcţia inversă $f^{-1} : J \to I$ este strict crescătoare.

Fie $y \in J$ arbitrar. Arătăm că f^{-1} este continuă în y. Cum $y \in J$ este arbitrar, va rezulta că f^{-1} este continuă pe J. Fie V o vecinătate arbitrară a lui $f^{-1}(y)$; arătăm că există o vecinătate U a lui y cu proprietatea $f^{-1}(J \cap U) \subset V$, ceea ce înseamnă că f^{-1} este continuă în y. Considerăm cazul când y nu este extremitate a intervalului J (cazul contrar se discută în mod asemănător). Atunci, cum f^{-1} este strict crescătoare, nici $x = f^{-1}(y) \in I$ nu este extremitate a intervalului I. Prin urmare există $\varepsilon > 0$ astfel încât $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset I \cap V$. Din $x - \varepsilon < x < x + \varepsilon$ şi f strict crescătoare rezultă $f(x - \varepsilon) < f(x) < f(x + \varepsilon)$, de unde deducem că intervalul $(f(x - \varepsilon), f(x + \varepsilon))$ este o vecinătate a numărului $f(x) = y$. Arătăm că $f^{-1}((f(x - \varepsilon), f(x + \varepsilon)) \subset V$, adică pentru $u \in (f(x - \varepsilon), f(x + \varepsilon))$ arătăm că are loc $f^{-1}(u) \in V$. Deoarece f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I, din $u \in (f(x - \varepsilon), f(x + \varepsilon))$ deducem că există

$c \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ cu $f(c) = u$ de unde rezultă că $f^{-1}(u) = c \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset V$. Aşadar, pentru vecinătatea V arbitrar luată a lui $f^{-1}(y)$ există o vecinătate U a lui y astfel încât $f^{-1}(J \cap U) \subset V$, şi anume $U = (f(x - \varepsilon), f(x + \varepsilon))$ intervalul determinat mai sus.

3.4.21 Exemplu. Funcţia $f : [0, 1] \to [1, 3]$, $f(x) = x^5 + x + 1$ este continuă şi bijectivă. Aplicând teorema precedentă rezultă că inversa lui f, funcţia $f^{-1} : [1, 3] \to [0, 1]$ este continuă.

Punctele de discontinuitate în cazul funcţiilor $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le clasificăm în două categorii.

3.4.22 Definiţie. Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in D$ un punct de discontinuitate a funcţiei f.

i) Spunem că punctul de discontinuitate x_0 al funcţiei f are **speţa întâi**, dacă în punctul x_0 funcţia f are limite laterale finite.

ii) Spunem că punctul de discontinuitate x_0 al funcţiei f are **speţa a doua**, dacă punctul de discontinuitate nu are speţa întâi.

Următoarele două teoreme se referă la punctele de discontinuitate ale funcţiilor monotone.

3.4.23 Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă pe I. Atunci punctele de discontinuitate ale funcţiei f sunt de speţa întâi.*

Demonstraţie. Pe baza Teoremelor 3.2.22, 3.2.23 de existenţă a limitelor laterale în cazul funcţiilor monotone, în fiecare punct $x_0 \in I$ funcţia monotonă f are limite laterale finite. Rezultă că orice punct de discontinuitate a funcţiei f are speţa întâi.

3.4.24 Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă pe I. Atunci mulţimea punctelor de discontinuitate a funcţiei f este o mulţime cel mult numărabilă.*

Demonstraţie. Presupunem că funcţia f este crescătoare pe I. Pentru f descrescătoare pe I se va raţiona într-un mod asemănător. Deoarece f este monotonă, în fiecare $x_0 \in I$ funcţia f are limite laterale finite.

Notăm cu A mulţimea punctelor de discontinuitate a funcţiei f diferite de cele două extremităţi ale intervalului I. Evident $A \subset I$. Considerăm două puncte de discontinuitate $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$. Fie $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Din

$$f(x_1 + 0) = \inf \{ f(x) | \, x \in I, x > x_1 \} \le f(c) \le \sup \{ f(x) | \, x \in I, x < x_2 \} = f(x_2 - 0)$$

rezultă că $(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0)) \cap (f(x_2 - 0), f(x_2 + 0)) = \emptyset$.

Aşadar funcţia $\phi : A \to \mathbb{Q}$, care ataşează fiecărui punct $x \in A$ un punct raţional din intervalul $(f(x - 0), f(x + 0))$, este o funcţie injectivă. Mulţimea $\mathbb{Q}$ fiind numărabilă, deducem că mulţimea A este cel mult numărabilă.

În continuare studiem punctele de discontinuitate ale funcţiilor cu proprietatea lui Darboux.

3.4.25 Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă f are în intervalul I cel puţin un punct de discontinuitate de speţa întâi, atunci f nu are proprietatea lui Darboux pe I.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in I$ un punct de discontinuitate de speţa întâi pentru f. Înseamnă că există limitele laterale $f(x_0 - 0) \in \mathbb{R}, f(x_0 + 0) \in \mathbb{R}$. Deoarece f este discontinuă în punctul x_0, cel puţin una dintre limitele laterale $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ este diferită de $f(x_0)$. Considerăm $f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$. În cazul $f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ se poate raţiona în mod asemănător. Notăm $|f(x_0) - f(x_0 - 0)| = d$. Are loc $d > 0$. Considerăm intervalul $V = \left(f(x_0 - 0) - \frac{d}{3}, f(x_0 - 0) + \frac{d}{3}\right)$. Cum intervalul V este vecinătate a numărului $f(x_0 - 0)$, pe baza definiţiei limitei la stânga în punctul x_0 există o vecinătate U a lui x_0 cu proprietatea că $f(I \cap (-\infty, x_0) \cap U) \subset V$. Cum U este vecinătate pentru x_0, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset U$. Fixăm $x_1 \in I \cap (-\infty, x_0) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Atunci $[x_1, x_0) \subset I \cap (-\infty, x_0) \cap U$, deci $f([x_1, x_0)) \subset V$. Fie $y = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0)}{2}$; evident $y \notin V = \left(f(x_0 - 0) - \frac{d}{3}, f(x_0 - 0) + \frac{d}{3}\right)$ şi y este situat strict între $f(x_1)$ şi $f(x_0)$. Din $f((x_1, x_0)) \subset V$ şi $y \notin V$ rezultă că nu există $c \in (x_1, x_0)$ cu proprietatea $f(c) = y$ şi din acest motiv f nu are proprietatea lui Darboux pe I.

3.4.26 Teoremă. *Punctele de discontinuitate ale unei funcţii cu proprietatea lui Darboux au speţa a doua.*

Demonstraţie. Concluzia teoremei decurge direct din teorema precedentă.

Următoarea teoremă dă o caracterizare a funcţiilor continue pe o mulţime.

3.4.27 Teoremă. *Funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe mulţimea nevidă $D_0 \subset D$ dacă şi numai dacă pentru orice $x \in D_0$ şi $\varepsilon > 0$ există $\delta(x, \varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $u \in D_0$ cu $|x - u| < \delta(x, \varepsilon)$ să avem $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.*

Demonstraţie. Conform Definiţiei 3.4.1 funcţia f este continuă pe mulţimea D_0 dacă şi numai dacă ea este continuă în fiecare punct $x \in D_0$. Aplicând pentru fiecare $x \in D_0$ afirmaţia (ii) din Teorema 3.3.3 de caracterizare a funcţiilor continue într-un punct obţinem că f este continuă în fiecare $x \in D_0$, dacă şi numai dacă pentru fiecare $x \in D_0$ şi fiecare $\varepsilon > 0$ există $\delta(x,\varepsilon) > 0$ astfel încât $u \in D_0$, $|x-u| < \delta(x,\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

În cele ce urmează considerăm o noţiune specială de continuitate, cea de continuitate uniformă a funcţiei pe o mulţime.

3.4.28 Definiţie. Spunem că funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este **uniform continuă** pe mulţimea nevidă $D_0 \subset D$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$x,\, u \in D_0, |x-u| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon.$$

Dacă f este uniform continuă pe mulţimea de definiţie D, atunci spunem că funcţia f este uniform continuă.

3.4.29 Observaţie. Cele două noţiuni, cea de continuitate pe mulţimea D_0, şi respectiv uniform continuitatea pe D_0, diferă la ordinea cuantificatorilor logici (”există”,”oricare”) şi implicit prin rolul numărului δ care în cazul continuităţii uniforme nu depinde de $x \in D_0$.

3.4.30 Teoremă. *Dacă funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este uniform continuă pe mulţimea nevidă $D_0 \subset D$, atunci f este continuă pe mulţimea D_0.*

Demonstraţie. Pe baza definiţiei continuităţii uniforme a funcţiei f pe mulţimea D_0 pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru fiecare $x, u \in D_0$ cu $|x-u| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Prin urmare, pentru $x \in D_0$ şi $\varepsilon > 0$ arbitrare există $\delta(x,\varepsilon) > 0$ cu proprietatea că $u \in D_0, |x-u| < \delta(x,\varepsilon)$ implică $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$, şi anume $\delta(x,\varepsilon) = \delta(x)$. Pe baza Teoremei 3.4.27 de caracterizare a funcţiilor continue pe o mulţime rezultă că f este continuă pe D_0.

3.4.31 Observaţie. Reciproca teoremei nu are loc. Există funcţii continue pe un interval care nu sunt uniform continue pe acel interval.

3.4.32 Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ este continuă pe $\mathbb{R}$. Arătăm că funcţia f nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. Presupunem că f este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. Atunci, pe baza definiţiei continuităţii uniforme, pentru $\varepsilon = 1$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice $x, u \in \mathbb{R}$ cu $|x-u| < \delta$ rezultă $|f(x) - f(u)| < 1$. Luând $x = \dfrac{1}{\delta}$ şi $u = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$ are loc $|x-u| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, dar

$$|f(x) - f(u)| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1,$$

deci $|f(x) - f(u)| < 1$ nu are loc. Aşadar f nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

Următoarea teoremă arată că pe un interval închis $[a,b] \subset \mathbb{R}$ continuitatea funcţiilor este uniformă.

3.4.33 Teoremă. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci f este uniform continuă pe $[a,b]$.*

Demonstraţie. Raţionăm prin reducere la absurd. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b]$. Presupunem că funcţia f nu este uniform continuă pe $[a,b]$. Atunci există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru fiecare $\delta > 0$ există $x, u \in [a,b]$ astfel încât $\begin{cases} |x-u| < \delta \\ |f(x) - f(u)| \geq \varepsilon. \end{cases}$ În particular, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, considerând $\delta = \dfrac{1}{n}$, există $x_n, u_n \in [a,b]$ cu proprietatea $\begin{cases} |x_n - u_n| < \dfrac{1}{n} \\ |f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon. \end{cases}$ Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are toţi termenii în intervalul $[a,b]$. Aşadar şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Rezultă că are un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 1}$convergent. Notăm cu x_0 limita acestui subşir. Din $x_{n_k} \in [a,b], \forall k \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $x_0 \in [a,b]$. Funcţia f fiind continuă pe $[a,b]$, ea este continuă în fiecare punct al intervalului, deci şi în punctul x_0. Din $|x_{n_k} - u_{n_k}| < \dfrac{1}{n_k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$ rezultă $\lim\limits_{k\to\infty} (x_{n_k} - u_{n_k}) = 0$ şi

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} - (x_{n_k} - u_{n_k})) = x_0 - 0 = x_0.$$

Pe baza continuităţii funcţiei f în punctul x_0 avem $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ şi $\lim\limits_{k\to\infty} f(u_{n_k}) = f(x_0)$. Rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(u_{n_k})) = 0$, în contradicţie cu $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Presupunerea noastră duce la contradicţie, deci este incorectă. Rezultă că funcţia f este uniform continuă pe $[a,b]$.

3.4.34 Exemplu. Am văzut în Exemplul 3.4.32 că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, continuă pe $\mathbb{R}$, nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. Considerăm acum restricţia funcţiei f la intervalul $[0, 1]$,

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = x^2.$$

Conform teoremei precedente funcţia g este uniform continuă pe $[0, 1]$.

Capitolul 4

Funcţii $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile

4.1 Derivata funcţiei într-un punct. Derivabilitatea funcţiei într-un punct

Utilitatea practică a raportării variaţiei funcţiei f într-un punct x_0, $f(x) - f(x_0)$, la variaţia lui x, $x - x_0$, conduce la următoarea definiţie.

4.1.1. Definiţie. Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in D$ un punct de acumulare pentru D. Spunem că **funcţia f are derivată în punctul** x_0 dacă există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pe care o notăm $f'(x_0)$ sau $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ şi o numim **derivata în punctul** x_0 **a funcţiei** f.

Spunem că **funcţia f este derivabilă în punctul** x_0 dacă există

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ şi } f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

4.1.2. Exemplu. i) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Pentru $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x x_0} + \sqrt[3]{(x_0)^2}\right)}{(x - x_0)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x x_0} + \sqrt[3]{(x_0)^2}\right)} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x x_0} + \sqrt[3]{(x_0)^2}\right)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x x_0} + \sqrt[3]{(x_0)^2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x_0)^2}} \in \mathbb{R},$$

deci funcţia f este derivabilă în punctul $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pentru $x_0 = 0$ avem $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty \notin \mathbb{R}$, deci funcţia f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

ii) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Pentru fiecare $x_0 \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cos \frac{x + x_0}{2} = 1 \cdot \cos \frac{x_0 + x_0}{2} = \cos x_0. \end{aligned}$$

Din $f'(x_0) = \cos x_0 \in \mathbb{R}$ rezultă că f este derivabilă în x_0.

iii) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$.
Pentru fiecare $x_0\in\mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-2\sin\dfrac{x+x_0}{2}\sin\dfrac{x-x_0}{2}}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}(-1)\frac{\sin\dfrac{x-x_0}{2}}{\dfrac{x-x_0}{2}}\sin\frac{x+x_0}{2}=-1\cdot\sin\frac{x_0+x_0}{2}=-\sin x_0. \end{aligned}$$

Din $f'(x_0)=-\sin x_0\in\mathbb{R}$ rezultă că f este derivabilă în x_0.
iv) Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$.
Pentru fiecare $x_0\in(0,+\infty)$ avem

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\ln\frac{x}{x_0}\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}=\ln e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}, \end{aligned}$$

deoarece

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}=\lim_{x\to x_0}\left(1+\left(\frac{x}{x_0}-1\right)\right)^{\frac{1}{x-x_0}}=\lim_{x\to x_0}\left[\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}}\right]^{\frac{1}{x_0}}=e^{\frac{1}{x_0}}.$$

Din $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}\in\mathbb{R}$ rezultă că f este derivabilă în $x_0\in(0,+\infty)$.
v) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.
Pentru fiecare $x_0\in\mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-(x_0)^n}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+x^{n-3}(x_0)^2+\ldots+x(x_0)^{n-2}+(x_0)^{n-1}\right)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+x^{n-3}(x_0)^2+\ldots+x(x_0)^{n-2}+(x_0)^{n-1}\right)\\ &= (x_0)^{n-1}+(x_0)^{n-1}+\ldots+(x_0)^{n-1}\\ &= n(x_0)^{n-1}. \end{aligned}$$

Din $f'(x_0)=n(x_0)^{n-1}\in\mathbb{R}$ rezultă că f este derivabilă în x_0.

Noţiunea de derivată într-un punct a unei funcţii $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se consideră numai în acele puncte $x_0\in D$ care sunt puncte de acumulare pentru D. Într-un punct izolat al mulţimii D nu se pune problema existenţei derivatei a unei funcţii $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Noţiunile de derivată într-un punct x_0 a funcţiei f, cea de limită în x_0 a funcţiei f, cât şi cea de continuitate/discontinuitate în x_0 a funcţiei f au un caracter local, în sensul că pentru studiul acestor noţiuni punctele unde trebuie să cunoaştem valorile funcţiei f se încadrează într-o vecinătate a lui x_0.

Următoarea teoremă evidenţiază legătura dintre derivabilitatea funcţiei într-un punct şi continuitatea ei în acelaşi punct.

4.1.3. Teoremă. *Fie $D\subset\mathbb{R}$ şi $x_0\in D$ un punct de acumulare pentru D. Dacă funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0, atunci funcţia f este continuă în punctul x_0.*

Demonstraţie. Pentru fiecare $x\in D\setminus\{x_0\}$ are loc

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Pe baza acestei identităţi calculăm $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Deoarece funcţia f este derivabilă în punctul x_0 avem $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ şi deoarece $\lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$ obţinem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0)$, deci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ultima egalitate arată că funcţia f este continuă în punctul x_0.

4.1.4. Observaţie. Din existenţa derivatei funcţiei f în punctul x_0 nu rezultă continuitatea funcţiei în x_0.

4.1.5. Exemplu. Pentru funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, \text{ dacă } x \le 0 \\ \sqrt[3]{x} + 1, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$$

avem $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, deoarece ambele limite laterale

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty,$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

sunt egale cu $+\infty$. Funcţia f are derivată în punctul $x_0 = 0$ şi nu este derivabilă în acest punct deoarece $f'(0) \notin \mathbb{R}$. Din $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0 \ne \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$ rezultă că funcţia f nu este continuă în $x_0 = 0$.

4.1.6. Observaţie. Reciproca Teoremei 4.1.3 nu are loc. Este posibil ca o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să fie continuă într-un punct x_0 şi să nu fie derivabilă în acest punct.

4.1.7. Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ este continuă în $x_0 = 0$ şi nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

Dacă o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu este continuă în punctul $x_0 \in D$ care este punct de acumulare pentru D, atunci, pe baza teoremei de înainte, funcţia f nu este derivabilă în acest punct. Condiţia de continuitate în x_0 a funcţiei este o condiţie necesară derivabilităţii funcţiei în punctul x_0.

Noţiunile de limită la stânga respectiv la dreapta într-un punct a unei funcţii ne conduc la noţiuni de derivată laterală.

4.1.8. Definiţie. Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i) Fie $x_0 \in D$, x_0 punct de acumulare pentru mulţimea $D \cap (-\infty, x_0)$.

Spunem că **funcţia f are în punctul x_0 derivată la stânga**, dacă există limita

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pe care o notăm $f_s'(x_0)$ şi o numim **derivata la stânga în punctul x_0 a funcţiei f**.

Spunem că **funcţia f este derivabilă la stânga în punctul** x_0 dacă există

$$f_s'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

şi $f_s'(x_0) \in \mathbb{R}$.

ii) Fie $x_0 \in D$, x_0 punct de acumulare pentru mulţimea $D \cap (x_0, +\infty)$.

Spunem că **funcţia f are în punctul x_0 derivată la dreapta**, dacă există limita

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pe care o notăm $f_d'(x_0)$ şi o numim **derivata la dreapta în punctul x_0 a funcţiei f**.

Spunem că **funcţia f este derivabilă la dreapta în punctul** x_0 dacă există

$$f_d'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

şi $f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$.

Derivatele $f_s'(x_0)$ şi $f_d'(x_0)$ se numesc derivate laterale ale funcţiei f în punctul x_0.

4.1.9. Observaţie. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie. Derivabilitatea în punctul a a funcţiei f în sensul Definiţiei 4.1.1 revine la derivabilitatea la dreapta în punctul a a funcţiei f. Derivabilitatea în punctul b a funcţiei f în sensul Definiţiei 4.1.1 revine la derivabilitatea la stânga în punctul b a funcţiei f.

Următoarea teoremă arată legătura dintre derivata funcţiei într-un punct şi derivatele laterale ale ei în acelaşi punct.

4.1.10. Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie. Fie $x_0 \in D$ un punct de acumulare atât pentru mulţimea $D \cap (-\infty, x_0)$ cât şi pentru mulţimea $D \cap (x_0, +\infty)$.*

i) Dacă funcţia f are derivată în punctul x_0, atunci ea are derivată la stânga în x_0, are derivată la dreapta în x_0 şi $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = f'(x_0)$.

ii) Dacă funcţia f are derivată la stânga în x_0, are derivată la dreapta în x_0 şi $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$, atunci funcţia f are derivată în punctul x_0 şi $f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$.

Demonstraţie. Se utilizează Teorema 3.2.20 care arată legătura dintre limita funcţiei într-un punct şi limitele laterale ale funcţiei în acelaşi punct.

Următoarea teoremă arată legăturea dintre derivabilitatea laterală într-un punct a unei funcţii şi continuitatea laterală în acelaşi punct a funcţiei.

4.1.11. Teoremă. *Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in D$.*

i) Dacă x_0 este un punct de acumulare pentru mulţimea $D \cap (-\infty, x_0)$ şi funcţia f este derivabilă la stânga în punctul x_0, atunci funcţia f este continuă la stânga în punctul x_0.

ii) Dacă x_0 este un punct de acumulare pentru mulţimea $D \cap (x_0, +\infty)$ şi funcţia f este derivabilă la dreapta în punctul x_0, atunci funcţia f este continuă la dreapta în punctul x_0.

Demonstraţie. i) Pentru fiecare $x \in D \setminus \{x_0\}$ are loc

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

Pe baza acestei identităţi calculăm $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$. Deoarece funcţia f este derivabilă la stânga în punctul x_0 avem $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_s'(x_0) \in \mathbb{R}$ şi deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} (x - x_0) = 0$ obţinem

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f_s'(x_0) \cdot 0 + f(x_0),$$

aşadar $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$, egalitate care ne spune că funcţia f este continuă la stânga în punctul x_0.

ii) Pe baza aceleiaşi identităţi calculăm $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$. Deoarece funcţia f este derivabilă la dreapta în punctul x_0 avem $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$ şi deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (x - x_0) = 0$ obţinem

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f_d'(x_0) \cdot 0 + f(x_0),$$

aşadar $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$, egalitate care ne spune că funcţia f este continuă la dreapta în punctul x_0.

4.1.12. Observaţie. Este posibil ca o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să fie continuă la stânga într-un punct şi să nu fie derivabilă la stânga în acel punct. Este posibil ca o funcţie să fie continuă la dreapta într-un punct şi să nu fie derivabilă la dreapta în acel punct.

4.1.13. Exemplu. Funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este continuă la stânga în punctul $x_0 = 0$ şi nu este derivabilă la stânga în $x_0 = 0$.

Interpretarea geometrică a derivatei $f'(x_0)$

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $x_0 \in I$ un punct interior intervalului şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie care are derivată în x_0.

Considerăm mulţimea $G = \{(x, f(x)) | \, x \in I\}$ numită **graficul funcţiei** f. Mulţimea G poate fi reprezentată într-un sistem cartezian de coordonate xOy prin mulţimea punctelor (x, y) de abscisă x şi ordonată $y = f(x)$, unde x parcurge mulţimea I. Considerăm punctele $M_0(x_0, f(x_0))$ şi $M(x, f(x))$ ale graficului G. Unghiul α dintre dreapta M_0M şi axa Ox are panta (coeficientul unghiular)

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Deoarece f are derivată în punctul x_0, există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Rezultă că poziţia dreptei M_0M tinde către o poziţie limită M_0T atunci când x tinde la x_0. Dreapta M_0T, adică dreapta care trece prin punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ şi care are panta (coeficientul unghiular) $f'(x_0)$, se numeşte **dreapta tangentă în punctul** $M_0(x_0, f(x_0))$ **la graficul funcţiei** f.

Dacă funcţia f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ şi prin urmare ecuaţia dreptei tangente în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei f se scrie cunoscând un punct al dreptei $(x_0, f(x_0))$ şi panta dreptei egală cu $f'(x_0)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Dacă $f'(x_0) = -\infty$ sau $f'(x_0) = +\infty$ atunci din $\mathrm{tg}\alpha = -\infty$, respectiv $\mathrm{tg}\alpha = +\infty$ obţinem $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ sau $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ şi rezultă că dreapta tangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Oy; aşadar ecuaţia ei este $x = x_0$.

Dacă în punctul x_0 o funcţie f are derivată laterală la stânga atunci semidreapta care trece prin punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, are panta (coeficientul unghiular) $f'_s(x_0)$, şi este formată din puncte de abscisă $x \leq x_0$, se numeşte semidreapta tangentă la stânga în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ graficului funcţiei f. Prin analogie se defineşte noţiunea de semidreaptă tangentă la dreapta în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ graficului funcţiei f în cazul când o funcţie f are derivată laterală la dreapta în punctul x_0.

Dacă o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ are derivată în punctul $x_0 \in I$ care este un punct interior intervalului, atunci cele două semidrepte tangente în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei f sunt în prelungire.

Distingem două tipuri de puncte în care funcţia f este continuă şi are derivate laterale, fără să fie derivabilă.

4.1.14. Definiţie. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $x_0 \in I$ un punct interior intervalului şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie care este continuă în x_0, are derivate laterale în x_0, dar derivatele laterale sunt diferite adică $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$.

i) Dacă $f'_s(x_0) \in \mathbb{R}$ sau $f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$ atunci punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ se numeşte **punct unghiular al graficului funcţiei** f.

ii) Dacă $f'_s(x_0) = -\infty$ şi $f'_d(x_0) = +\infty$ sau invers, atunci punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ se numeşte **punct de întoarcere al graficului funcţiei** f.

4.1.15. Exemplu. i) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin x|$ este continuă în $x_0 = 0$,

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|\sin x| - 0}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-\sin x}{x} = -1 \in \mathbb{R},$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|\sin x| - 0}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 \in \mathbb{R}.$$

Obţinem $f_s'(0) \neq f_d'(0)$, aşadar $(0, f(0)) = (0,0)$ este punct unghiular al graficului funcţiei f.

ii) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ este continuă în $x_0 = 0$,

$$f_s'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty,$$

$$f_d'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty,$$

aşadar $(0, f(0)) = (0,0)$ este punct de întoarcere al graficului funcţiei f.

iii) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \\ \sqrt{x}, \text{ dacă } x \in [0, +\infty) \end{cases}$ este continuă în $x_0 = 0$,

$$f_s'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x - 0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1 = 1 \in \mathbb{R},$$

$$f_d'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

aşadar $(0, f(0)) = (0,0)$ este punct unghiular al graficului funcţiei f.

Operaţii cu funcţii derivabile într-un punct

Următoarele două teoreme se referă la derivabilitatea într-un punct a funcţiei sumă, produs, cât, respectiv a funcţiei compuse.

4.1.16. Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare pentru mulţimea D.*

i) Dacă funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul x_0, atunci funcţia sumă $f+g$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

ii) Dacă funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul x_0, atunci funcţia produs $f \cdot g$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

iii) Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0, atunci funcţia $c \cdot f$, unde $c \in \mathbb{R}$, este derivabilă în punctul x_0 şi are loc $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

iv) Dacă funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul x_0 şi $g'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{(g'(x_0))^2}$.

Demonstraţie. Cum cele două funcţii f şi g sunt derivabile în punctul x_0, avem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}, \text{ respectiv } \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

i) Pentru orice $x \in D \setminus \{x_0\}$ are loc $\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ şi deducem

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

ii) Pentru orice $x \in D \setminus \{x_0\}$ are loc

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0};$$

ţinem cont că derivabilitatea funcţiei g în punctul x_0 implică proprietatea de continuitate în x_0 a funcţiei g, deci are loc $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \in \mathbb{R}$ şi deducem

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &= f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

iii) Din punctul ii), în cazul când funcţia g este constantă $g(x) = c$, pentru orice $x \in D$, rezultă $g(x_0) = c, g'(x_0) = 0$, şi obţinem $(f \cdot c)'(x_0) = f'(x_0)\cdot c + f(x_0)\cdot 0 = c\cdot f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

iv) Am văzut la demonstrarea părţii ii) că funcţia g este continuă în x_0; cum $g(x_0) \neq 0$, utilizând Teorema 3.3.8 rezultă existenţa unei vecinătate U a punctului x_0 astfel ca $x \in D\cap U \Rightarrow g(x) \neq 0$. Pentru orice $x \in D\cap U \setminus \{x_0\}$ are loc

$$\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{g(x)\,g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]$$

şi deducem

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)\,g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\\ &= \frac{1}{(g'(x_0))^2}\left[f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)\right]\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

4.1.17. Exemplu. Utilizăm iv) pentru a calcula $(\mathrm{tg})'(x_0)$ şi $(\mathrm{ctg})'(x_0)$.

i) Pentru $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$ avem

$$\begin{aligned}(\mathrm{tg})'(x_0) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x_0) = \frac{(\sin)'(x_0)\cos x_0-\sin x_0\,(\cos)'(x_0)}{\cos^2 x_0} = \frac{\cos(x_0)\cos x_0-\sin x_0\,(-\sin x_0)}{\cos^2 x_0}\\ &= \frac{\cos^2 x_0+\sin^2 x_0}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}.\end{aligned}$$

ii) Pentru $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ avem

$$\begin{aligned}(\mathrm{ctg})'(x_0) &= \left(\frac{\cos}{\sin}\right)'(x_0) = \frac{(\cos)'(x_0)\sin x_0-\cos x_0\,(\sin)'(x_0)}{\sin^2 x_0} = \frac{-\sin(x_0)\sin x_0-\cos x_0\cos x_0}{\sin^2 x_0}\\ &= \frac{-\left(\sin^2 x_0+\cos^2 x_0\right)}{\sin^2 x_0} = \frac{-1}{\sin^2 x_0}.\end{aligned}$$

4.1.18. Observaţie. Pornind de la teorema precedentă, din derivabilitatea funcţiilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ în punctul x_0, prin inducţie matematică, se obţine derivabilitatea în punctul x_0 a funcţiei sumă $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, a funcţiei produs $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$, cât şi formulele de derivare

$$(f_1+f_2+\ldots+f_n)'(x_0) = f_1'(x_0)+f_2'(x_0)+\ldots+f_n'(x_0),$$
$$(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n}\left(f_1(x_0)\cdot f_2(x_0)\cdot\ldots\cdot f_{k-1}(x_0)\cdot f_k'(x_0)\cdot f_{k+1}(x_0)\cdot\ldots\cdot f_n(x_0)\right).$$

4.1.19. Teoremă. *Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ două intervale şi funcţiile $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$. Dacă funcţia f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ şi funcţia g este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$, atunci funcţia compusă $g\circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.*

Demonstraţie. În ipotezele teoremei, cum funcţia f este derivabilă în punctul x_0 şi funcţia g este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$, avem

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)\in\mathbb{R},\ \lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = g'(y_0) = g'(f(x_0))\in\mathbb{R}.$$

Considerăm funcţia $p : J \to \mathbb{R}$, $p(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, & \text{dacă } y \in J \setminus \{y_0\} \\ g'(y_0), & \text{dacă } y = y_0. \end{cases}$ Calculând

$$\lim_{y \to y_0} p(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0)$$

constatăm egalitatea $\lim\limits_{y \to y_0} p(y) = p(y_0)$, deci funcţia p este continuă în punctul y_0.

Din definiţia funcţiei p explicităm $g(y) - g(y_0) = p(y) \cdot (y - y_0), \forall y \in J \setminus \{y_0\}$ şi deducem

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = p(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0)), \forall x \in I.$$

Aşadar pentru $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ are loc $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = p(f(x)) \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Cum funcţia f este derivabilă în punctul x_0, rezultă că ea este continuă în x_0, iar funcţia p fiind continuă în $y_0 = f(x_0)$, deducem continuitatea funcţiei $p \circ f$ în punctul x_0. Prin urmare

$$\lim_{x \to x_0} p(f(x)) = p(f(x_0)) = p(y_0) = g'(y_0) = g'(f(x_0)).$$

Utilizând şi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ obţinem

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} p(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Menţionăm că existenţa expresiei $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nu este garantată pe o vecinătate a punctului x_0, deoarece egalitatea $f(x) = f(x_0)$ poate fi adevărată în unele puncte x ale vecinătăţii. Din acest motiv în demonstraţia teoremei am evitat utilizarea (de altfel tentantă) a expresiei menţionate.

4.1.20. Exemplu. i) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x^n)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos^n x$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Pe baza teoremei precedente obţinem $f'(x_0) = -\sin((x_0)^n) \cdot n(x_0)^{n-1} = -n(x_0)^{n-1} \sin((x_0)^n)$, respectiv $g'(x_0) = n(\cos x_0)^{n-1} \cdot (-\sin x_0) = -n(\cos x_0)^{n-1} \sin x_0$.

ii) Fie $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^r$ cu $r \in \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in (0, +\infty)$. Exprimăm

$$f(x) = x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x}$$

şi aplicăm teorema precedentă $f'(x_0) = e^{r \ln x_0} \cdot \left(r \dfrac{1}{x_0} \right)$, deci obţinem

$$f'(x_0) = (x_0)^r \left(r \frac{1}{x_0} \right) = r(x_0)^{r-1}.$$

Următoarea teoremă formulează condiţii suficiente pentru derivabilitatea într-un punct a funcţiei inverse.

4.1.21. Teoremă. *Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale. Fie funcţia $f : I \to J$ bijectivă. Dacă funcţia f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, $f'(x_0) \neq 0$ şi funcţia inversă $f^{-1} : J \to I$ este continuă în punctul $y_0 = f(x_0)$, atunci funcţia f^{-1} este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi are loc*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demonstraţie. Fie $y \in J$, $y \neq y_0 = f(x_0)$. Pe baza injectivităţii funcţiei f, cu privire la $x = f^{-1}(y)$ deducem $x \neq x_0$. Pentru orice $y \in J$, $y \neq y_0$ are loc

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}},$$

unde $x = f^{-1}(y)$. Când y tinde la y_0, din continuitatea funcţiei f^{-1} în punctul y_0 obţinem că $f^{-1}(y) = x$ tinde către $f^{-1}(y_0) = x_0$. Utilizând $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0$ obţinem

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

4.1.22. Exemplu. i) Funcţia $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ este continuă şi bijectivă. Inversa ei, funcţia $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este continuă. Pentru $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $(\sin)'(x_0) = \cos x_0 \neq 0$, funcţia arcsin este continuă în $y_0 = \sin x_0$ deci, pe baza teoremei, funcţia arcsin este derivabilă în punctul $y_0 = \sin x_0 \in (-1, 1)$ şi $(\arcsin)'(y_0) = \dfrac{1}{(\sin)'(x_0)} = \dfrac{1}{\cos x_0}$. Ţinând cont de $\cos x_0 = \sqrt{1 - \sin^2 x_0} = \sqrt{1 - (y_0)^2}$, obţinem

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\sqrt{1 - (y_0)^2}}, \text{ unde } y_0 \in (-1, 1).$$

ii) Funcţia $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ este continuă şi bijectivă. Inversa ei, funcţia $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ este continuă. Pentru $x_0 \in (0, \pi)$ avem $(\cos)'(x_0) = -\sin x_0 \neq 0$, funcţia arccos este continuă în $y_0 = \cos x_0$, deci, pe baza teoremei, funcţia arccos este derivabilă în punctul $y_0 = \cos x_0 \in (-1, 1)$ şi $(\arccos)'(y_0) = \dfrac{1}{(\cos)'(x_0)} = \dfrac{1}{-\sin x_0}$. Ţinând cont de $\sin x_0 = \sqrt{1 - \cos^2 x_0} = \sqrt{1 - (y_0)^2}$ obţinem

$$(\arccos)'(y_0) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (y_0)^2}}, \text{ unde } y_0 \in (-1, 1).$$

iii) Funcţia $\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ este continuă şi bijectivă. Inversa ei, funcţia $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este continuă. Pentru $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $(\mathrm{tg})'(x_0) = \dfrac{1}{\cos^2 x_0} \neq 0$, funcţia arctg este continuă în $y_0 = \mathrm{tg} x_0$, deci, pe baza teoremei, funcţia arctg este derivabilă în punctul $y_0 = \mathrm{tg} x_0$ şi $(\mathrm{arctg})'(y_0) = \dfrac{1}{(tg)'(x_0)} = \cos^2 x_0$. Ţinând cont de $\cos^2 x_0 = \dfrac{1}{1 + tg^2 x_0} = \dfrac{1}{1 + (y_0)^2}$ obţinem

$$(\mathrm{arctg})'(y_0) = \frac{1}{1 + (y_0)^2}.$$

iv) Funcţia $\mathrm{ctg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ este continuă şi bijectivă. Inversa ei, funcţia $\mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ este continuă. Pentru $x_0 \in (0, \pi)$ avem $(\mathrm{ctg})'(x_0) = \dfrac{-1}{\sin^2 x_0} \neq 0$, funcţia arcctg este continuă în $y_0 = \mathrm{ctg} x_0$, deci, pe baza teoremei, funcţia arcctg este derivabilă în punctul $y_0 = \mathrm{ctg} x_0$ şi $(\mathrm{arcctg})'(y_0) = \dfrac{1}{(\mathrm{ctg})'(x_0)} = -\sin^2 x_0$. Ţinând cont de $\sin^2 x_0 = \dfrac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2 x_0} = \dfrac{1}{1 + (y_0)^2}$ obţinem

$$(\mathrm{arcctg})'(y_0) = \frac{-1}{1 + (y_0)^2}.$$

v) Funcţia $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este continuă şi bijectivă. Inversa ei, funcţia $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $\exp(x) = e^x$, este continuă. Pentru $x_0 \in (0, +\infty)$ avem $(\ln)'(x_0) = \dfrac{1}{x_0} \neq 0$, funcţia exp este continuă în $y_0 = \ln x_0$, deci, pe baza teoremei, funcţia exp este derivabilă în punctul $y_0 = \ln x_0$ şi $(\exp)'(y_0) = \dfrac{1}{(\ln)'(x_0)} = x_0$. Ţinând cont de $x_0 = e^{\ln x_0} = e^{y_0}$ obţinem

$$(\exp)'(y_0) = e^{y_o}.$$

4.1.23. Teoremă. Dacă funcţia strict pozitivă $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi funcţia $g : D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul $x_0 \in D$, atunci funcţia $h : D \to \mathbb{R}$, $h(x) = (f(x))^{g(x)}$ este derivabilă în x_0 şi

$$h'(x_0) = g(x_0)(f(x_0))^{g(x_0)-1} f'(x_0) + (f(x_0))^{g(x_0)} (\ln f(x_0))\, g'(x_0).$$

Demonstraţie. Avem $h(x) = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$. Utilizând Teorema 4.1.19 obţinem $h'(x_0) = e^{g(x_0)\ln f(x_0)} \cdot \left[(g(x)\ln f(x))'\right]\big|_{x=x_0} = (f(x_0))^{g(x_0)} \cdot \left(g'(x_0)\ln f(x_0) + g(x_0)\dfrac{1}{f(x_0)} f'(x_0)\right)$ şi după efectuarea înmulţirii obţinem formula din enunţul teoremei.

4.2 Funcţii derivabile pe o mulţime

4.2.1. Definiţie. i) Spunem că funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este **derivabilă pe mulţimea** $D_0 \subset D$, D_0 nevidă, dacă ea este derivabilă în fiecare punct $x_0 \in D_0$.

ii) Dacă funcţia f este derivabilă pe mulţimea D_0, atunci funcţia $f' : D_0 \to \mathbb{R}$ care fiecărui $x \in D_0$ ataşează numărul real $f'(x)$ se numeşte **derivata funcţiei f pe mulţimea** D_0.

Dacă f este derivabilă pe mulţimea de definiţie D, atunci spunem că funcţia f este derivabilă.

4.2.2. Exemplu. i) Fie $n \in \{3, 5, 7, \ldots\}$. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Pentru $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ avem

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}x_0} + \sqrt[n]{x^{n-3}(x_0)^2} + \ldots + \sqrt[n]{x(x_0)^{n-2}} + \sqrt[n]{(x_0)^{n-1}}\right)}{(x - x_0)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}x_0} + \sqrt[n]{x^{n-3}(x_0)^2} + \ldots + \sqrt[n]{x(x_0)^{n-2}} + \sqrt[n]{(x_0)^{n-1}}\right)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}x_0} + \sqrt[n]{x^{n-3}(x_0)^2} + \ldots + \sqrt[n]{x(x_0)^{n-2}} + \sqrt[n]{(x_0)^{n-1}}} \\
&= \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{(x_0)^{n-1}}} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Aşadar funcţia f este derivabilă în fiecare punct $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Pentru $x_0 = 0$ avem

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{0_+} = +\infty \notin \mathbb{R},$$

deci funcţia f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

Funcţia $f' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{(x)^{n-1}}}$ este derivata funcţiei f pe mulţimea $D_0 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

ii) Reluând unele exemple din Paragraful 4.1 avem

$(c)' = 0$, cu $c \in \mathbb{R}$, reprezentând derivata funcţiei constante

$(x^n)' = nx^{n-1}, x \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$

$(x^r)' = rx^{r-1}, x \in (0, +\infty)$, unde $r \in \mathbb{R}$

$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, pentru $\begin{cases} x \in (0, +\infty), \text{ dacă } n \in \{2, 4, \ldots\} \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \text{ dacă } n \in \{3, 5, \ldots\} \end{cases}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$

$(e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}$

$(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$, unde $a \in (0, 1) \cup (0, +\infty)$

$(a^x)' = a^x \ln a, x \in \mathbb{R}$, unde $a \in (0,1) \cup (0,+\infty)$
$(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x, x \in \mathbb{R}$
$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$
$(ctgx)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi |\, k \in \mathbb{Z}\}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$
$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$
$(arctgx)' = \dfrac{1}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$
$(arcctgx)' = \dfrac{-1}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

De multe ori relativ la o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ne interesează valori optime ale ei.

4.2.3. Definiţie. Considerăm funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Fie $D_0 \subset D$ o mulţime nevidă.

i) Punctul $x_0 \in D$ se numeşte **punct de minim al funcţiei f relativ la mulţimea D_0**, dacă pentru orice $x \in D_0$ are loc $f(x_0) \leq f(x)$.

Punctul $x_0 \in D$ se numeşte **punct de maxim al funcţiei f relativ la mulţimea D_0**, dacă pentru orice $x \in D_0$ are loc $f(x_0) \geq f(x)$.

ii) Punctul $x_0 \in D$ se numeşte **punct de minim local al funcţiei** f relativ la mulţimea D_0, dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D_0 \cap U$.

Punctul $x_0 \in D$ se numeşte **punct de maxim local al funcţiei** f relativ la mulţimea D_0, dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in D_0 \cap U$.

Relativ la o mulţime dată, punctele de minim, respectiv de maxim se numesc **puncte de optim**, iar punctele de minim local, respectiv de maxim local se numesc **puncte de optim local**. Dacă un punct de optim (local) este relativ la $D_0 = D$ adică la mulţimea de definiţie a funcţiei f, atunci se poate numi simplu punct de optim (local), fără specificarea lui D_0.

Este evident că, relativ la o mulţime dată, un punct de optim este totodată punct de optim local, dar un punct de optim local nu neapărat este punct de optim. Următoarea teoremă arată o condiţie necesară pentru ca un punct din interiorul mulţimii de definiţie a funcţiei $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, punct în care f are derivată, să fie punct de optim local al funcţiei relativ la D.

4.2.4. Teoremă (Teorema lui Fermat) *Considerăm funcţia $f : D \subset R \rightarrow R$ şi un punct $x_0 \in D$. Dacă*

i) există $\epsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset D$ (x_0 este punct interior al mulţimii D),

ii) funcţia f are derivată în punctul x_0,

iii) punctul x_0 este punct de optim local al funcţiei f relativ la D,

atunci $f'(x_0) = 0$.

Demonstraţie. Considerăm că punctul x_0 este punct de minim local al funcţiei f relativ la D. Cazul când x_0 este punct de maxim local al funcţiei f relativ la D se studiază în mod asemănător. Din faptul că x_0 este punct de minim local al funcţiei f relativ la D, ţinând cont de i), deducem că există $\epsilon_1 > 0$ astfel încât $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in (x_0 - \epsilon_1, x_0 + \epsilon_1)$. Aşadar $f(x) - f(x_0) \geq 0, \forall x \in (x_0 - \epsilon_1, x_0 + \epsilon_1)$.

Deoarece funcţia f are derivată în punctul x_0, au loc egalităţile $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

Pentru fiecare x din intervalul $(x_0 - \epsilon_1, x_0)$ are loc $x - x_0 \leq 0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, prin urmare

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Pentru fiecare x din intervalul $(x_0, x_0 + \epsilon_1)$ are loc $x - x_0 \geq 0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, prin urmare

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Pe baza relaţiilor $f_s'(x_0) \leq 0, f_d'(x_0) \geq 0$, $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$ rezultă $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = 0$ şi prin urmare $f'(x_0) = 0$.

Interpretare geometrică. În ipotezele i) şi ii) ale teoremei, dacă punctul x_0 este punct de optim local al funcţiei f relativ la D, atunci tangenta în punctul $(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.

Punctele $x_0 \in D_0$ în care derivata unei funcţii $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se anulează se numesc **puncte staţionare (sau puncte critice)** ale funcţiei f relativ la D_0. Dacă un punct staţionar este relativ la $D_0 = D$, adică la mulţimea de definiţie a funcţiei f, atunci se poate numi simplu punct staţionar, fără specificarea lui D_0.

Cu privire la o funcţie derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este interval, teorema lui Fermat ne spune că punctele de optim local ale funcţiei f, interioare lui I, se găsesc printre punctele staţionare ale funcţiei.

Condiţia i), ca punctul x_0 să fie interior mulţimii D, este o condiţie esenţială pentru valabilitatea teoremei. Analizând funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x$, vedem că punctul $x_0 = -1$ este punct de minim al funcţiei relativ la $[-1, 1]$ şi $f'(-1) = 1 \neq 0$. Punctul $x_0 = -1$ nu este în interiorul mulţimii $[-1, 1]$.

4.2.5. Observaţie. Condiţia $f'(x_0) = 0$, necesară, în cadrul teoremei, pentru ca x_0 să fie punct de optim local al funcţiei f, nu este şi suficientă.

4.2.6. Exemplu. În cazul $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3, x_0 = 0$: derivata $f'(x) = 3x^2$ se anulează în $x_0 = 0$, punct situat în interiorul mulţimii de definiţie; punctul $x_0 = 0$ nu este punct de optim local relativ $\mathbb{R}$ al funcţiei f, deoarece în orice vecinătate U a lui $x_0 = 0$ există $x < 0$ cu $f(x) < 0 = f(0)$ (aşadar $x_0 = 0$ nu este punct de minim local pentru f), şi există $x > 0$ cu $f(x) > 0 = f(0)$ (aşadar $x_0 = 0$ nu este punct de maxim local pentru f).

Următoarea teoremă o demonstrăm utilizând teorema lui Weierstrass şi teorema lui Fermat.

4.2.7. Teoremă (Teorema lui Rolle) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă*
i) funcţia f este continuă pe $[a, b]$,
ii) funcţia f este derivabilă pe (a, b),
iii) $f(a) = f(b)$,
atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstraţie. *Cazul 1.* Funcţia f este o funcţie constantă. În acest caz $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ şi deci c poate fi orice punct din (a, b).

Cazul 2. Funcţia f nu este constantă pe $[a, b]$. Deoarece f este continuă pe un interval închis, pe $[a, b]$, conform teoremei lui Weierstrass, există $x_* \in [a, b]$ unde f îşi realizează minimul relativ la $[a, b]$ şi există $x^* \in [a, b]$ unde f îşi realizează maximul relativ la $[a, b]$. Deoarece f nu este constantă pe $[a, b]$, minimul lui f şi maximul lui f relativ la $[a, b]$ sunt două valori diferite $f(x_*) \neq f(x^*)$. Din $f(x_*) \neq f(x^*)$ şi $f(a) = f(b)$ deducem că cel puţin unul dintre punctele x_*, x^* nu este situat în capătul a sau b al intervalului $[a, b]$. Aşadar cel puţin un punct de optim relativ la $[a, b]$ al funcţiei f este situat în (a, b), adică în interiorul mulţimii $[a, b]$; notăm un asemenea punct cu c. Pe baza teoremei lui Fermat rezultă că $f'(c) = 0$.

Interpretare geometrică. Considerăm extremităţile graficului funcţiei f, adică punctele $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$.

Condiţia ii) geometric însemnă că graficul funcţiei f admite tangentă în fiecare punct al graficului cu excepţia, eventual, al extremităţilor $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$.

Condiţia iii) $f(a) = f(b)$ geometric înseamnă că dreapta AB este paralelă cu axa Ox.

Egalitatea $f'(c) = 0$ geometric însemnă că dreapta tangentă în punctul $(c, f(c))$ la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.

Aşadar teorema lui Rolle afirmă că dacă graficul funcţiei continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admite tangentă în fiecare punct al graficului, exceptând, eventual, extremităţile $A(a, f(a)), B(b, f(b))$, şi dacă dreapta AB (care uneşte cele două extremităţi) este paralelă cu axa Ox, atunci graficul are cel puţin un punct $(c, f(c))$ diferit de extremităţile sale $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$, în care tangenta dusă la grafic este paralelă cu axa Ox (şi implicit este paralelă cu dreapta AB).

Următoarea teoremă este o consecinţă directă a teoremei lui Rolle.

4.2.8. Teoremă. *Între oricare două zerouri consecutive ale unei funcţii derivabile pe un interval în mod necesar se găseşte cel puţin un zero al derivatei funcţiei.*

Următoarele două teoreme se numesc **teoreme de medie**.

4.2.9. Teoremă (Teorema lui Cauchy)
Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă
i) funcţiile f şi g sunt continue pe $[a, b]$,
ii) funcţiile f şi g sunt derivabile pe (a, b),
iii) $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$,
atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstraţie. Arătăm că în ipotezele i), ii), iii) ale teoremei are loc $g(b) - g(a) \neq 0$. Raţionăm prin reducere la absurd. Presupunem că $g(b) - g(a) = 0$; atunci, având funcţia g continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) şi cu $g(a) = g(b)$, pe baza teoremei lui Rolle ar rezulta existenţa unui $c \in (a, b)$ cu $g'(c) = 0$, în contradicţie cu ipoteza iii).

Considerăm funcţia $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + \lambda g(x)$ unde $\lambda = -\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Numărul λ a fost ales astfel ca să avem $h(a) = h(b)$. Din proprietăţile de continuitate pe $[a, b]$, respectiv de derivabilitate pe (a, b) ale funcţiilor f şi g rezultă că funcţia h este continuă pe $[a, b]$ şi este derivabilă pe (a, b). Aplicând teorema lui Rolle funcţiei h rezultă că există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $h'(c) = 0$. Ultima egalitate se scrie

$$f'(c) + \lambda g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = -\lambda \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

În cazul particular al funcţiei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, din teorema lui Cauchy se obţine următorul rezultat important.

4.2.10. Teoremă (Teorema lui Lagrange) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi funcţia $f : [a, b] \to R$. Dacă*
i) funcţia f este continuă pe $[a, b]$,
ii) funcţia f este derivabilă pe (a, b),
atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $g : [a, b] \to \mathbb{R}, g(x) = x$. Funcţia g este continuă pe $[a, b]$ şi este derivabilă pe (a, b). Evident $g'(x) = 1, \forall x \in (a, b)$, deci $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Pe baza teoremei lui Cauchy există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Ultima egalitate se scrie $\dfrac{f'(c)}{1} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ deoarece $g'(c) = 1$ şi $g(b) - g(a) = b - a$.

Interpretare geometrică. Considerăm punctele $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$ ale graficului funcţiei f. Dreapta AB are panta (coeficientul unghiular) $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Tangenta în punctul $(c, f(c))$ la graficul funcţiei f are panta (coeficientul unghiular) $f'(c)$.

Teorema lui Lagrange afirmă că dacă graficul funcţiei continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admite tangentă în fiecare punct, exceptând, eventual, extremităţile $A(a, f(a)), B(b, f(b))$, atunci cel puţin într-un punct $(c, f(c))$ al graficului, diferit de extremităţile $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$, tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu dreapta AB.

În continuare discutăm patru teoreme care sunt consecinţe importante ale teoremei lui Lagrange.

Teorema care urmează se utilizează la studiul existenţei derivatei într-un punct şi la studiul derivabilităţii într-un punct a unei funcţii.

4.2.11. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in I$, funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ şi continuă în x_0.*

i) Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, atunci funcţia f are derivată în punctul x_0 şi $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

ii) Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$, atunci funcţia f este derivabilă în punctul x_0, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ şi derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul x_0.

Demonstraţie. i) Notăm $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = l$. Arătăm că $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir arbitrar de numere reale din $I\setminus\{x_0\}$ convergent către x_0. Pentru fiecare $n\in\{1,2,\ldots\}$ considerăm intervalul $[a_n,b_n] = \begin{cases} [x_n,x_0], & \text{dacă } x_n < x_0 \\ [x_0,x_n], & \text{dacă } x_0 < x_n. \end{cases}$ Deoarece f este continuă pe I şi derivabilă pe $I\setminus\{x_0\}$, rezultă că f este continuă pe $[a_n,b_n]$ şi este derivabilă pe (a_n,b_n). Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[a_n,b_n]$ fixăm un $c_n\in(a_n,b_n)$ pentru care $f'(c_n) = \dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$. Acest c_n este situat strict între x_n şi x_0 şi are loc $f'(c_n) = \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$. Deoarece $|c_n-x_0| < |x_n-x_0|, \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = x_0$.

Din faptul că şirul $(c_n)_{n\geq 1}$, format cu numere reale din $I\setminus\{x_0\}$, este convergent către x_0 şi $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = l$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f'(c_n) = l$. Înlocuind aici $f'(c_n) = \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = l.$$

Cum şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale din $I\setminus\{x_0\}$, convergent către x_0, a fost arbitrar, deducem că $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$. Ultima egalitate înseamnă că $f'(x_0) = l$, aşadar are loc $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

ii) Dacă are loc i) şi în plus $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)\in\mathbb{R}$, atunci pe baza egalităţii $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ obţinem $f'(x_0)\in\mathbb{R}$ şi deci funcţia f este derivabilă în x_0. Astfel f are derivată pe I, $f' : I\to\mathbb{R}$. Pe baza egalităţii $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$ funcţia f' este continuă în x_0.

4.2.12. Observaţie. Continuitatea funcţiei f în punctul x_0 este esenţială pentru valabilitatea teoremei precedente.

4.2.13. Exemplu. Pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x\in(-\infty,0) \\ x, & \text{dacă } x\in[0,+\infty) \end{cases}$ avem $f'(x) = 1, \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Există $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. Funcţia f nu este continuă în $x_0 = 0$. Funcţia f nu are derivată în $x_0 = 0$ deoarece limitele

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{x-1}{x} = +\infty,\ \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{x}{x} = 1,$$

fiind diferite rezultă că limita $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nu există.

4.2.14. Observaţie. Existenţa limitei $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ nu este necesară pentru derivabilitatea în punctul x_0 a funcţiei f .

4.2.15. Exemplu. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \\ 0, & \text{dacă } x=0 \end{cases}$ este derivabilă în $x_0 = 0, f'(0) = 0$, dar derivata

$$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \\ 0, & \text{dacă } x=0 \end{cases} \text{ nu are limită în } x_0 = 0.$$

4.2.16. Observaţie. Pe baza Teoremei 4.2.11 din existenţa limitei la stânga în punctul x_0 a derivatei $f'(x)$ şi din continuitatea la stânga în punctul x_0 a funcţiei f rezultă că în punctul x_0 funcţia f are derivată la stânga şi $f'_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f'(x)$. Un rezultat similar este valabil cu privire la $f'_d(x_0)$.

Teorema următoare se utilizează la studiul monotoniei funcţiilor derivabile pe un interval.

4.2.17. Teoremă. *Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă.*
i) Funcţia f este crescătoare pe I dacă şi numai dacă $f'(x)\geq 0, \forall x\in I$.
ii) Funcţia f este descrescătoare pe I dacă şi numai dacă $f'(x)\leq 0, \forall x\in I$.
iii) Dacă $f'(x) > 0, \forall x\in I$, atunci funcţia f este strict crescătoare pe I.

iv) Dacă $f'(x) < 0, \forall x \in I$ atunci funcţia f este strict descrescătoare pe I.

Demonstraţie. i) Arătăm că dacă funcţia f este crescătoare pe I atunci $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Fie funcţia f crescătoare pe I. Considerăm $x_0 \in I$ arbitrar. Deoarece funcţia f este crescătoare, pentru $x \in I, x < x_0$ rezultă $f(x) \leq f(x_0)$ şi $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, iar pentru $x \in I, x > x_0$ rezultă $f(x) \geq f(x_0)$ şi $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Aşadar pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$ are loc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ şi deducem că $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Pe baza definiţiei derivatei $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ obţinem $f'(x_0) \geq 0$. Cum $x_0 \in I$ a fost arbitrar, deducem $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Arătăm că dacă $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$, atunci funcţia f este crescătoare pe I. Considerăm $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, arbitrare. Pe baza teoremei lui Lagrange există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Din egalitatea $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$, ştiind că $f'(c) \geq 0$ şi $x_2 - x_1 > 0$, obţinem $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, adică $f(x_1) \leq f(x_2)$. Prin urmare avem implicaţia

$$x_1, x_2 \in I, \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

deci funcţia f este crescătoare pe I.

ii) Raţionăm în mod asemănător ca şi la partea i).

iii) Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, arbitrare. Pe baza teoremei lui Lagrange există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Din egalitatea $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$, ştiind că $f'(c) > 0$ şi $x_2 - x_1 > 0$, obţinem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, adică $f(x_1) < f(x_2)$. Avem implicaţia

$$x_1, x_2 \in I, \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

deci funcţia f este strict crescătoare pe I.

iv) Raţionăm în mod asemănător ca şi la partea iii).

4.2.18. Exemplu. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 2nx^{2n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x \in (-\infty, 0]$ avem $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$. Pentru $x \in [0, \infty)$ avem $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

4.2.19. Observaţie. Reciproca afirmaţiei iii) nu are loc. Reciproca afirmaţiei iv) nu are loc. Există funcţii derivabile pe un interval, strict monotone, ale căror derivată se anulează în unele puncte ale intervalului.

4.2.20. Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este strict crescătoare şi derivata ei $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2$ se anulează în punctul $x_0 = 0$. Pentru a arăta că f este strict crescătoare considerăm $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ şi arătăm că $f(x_1) < f(x_2)$. Avem

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1)^3 - (x_2)^3 = (x_1 - x_2)\left((x_1)^2 + x_1 x_2 + (x_2)^2\right) < 0,$$

deoarece $x_1 - x_2 < 0$ şi $(x_1)^2 + x_1 x_2 + (x_2)^2 = \left(x_1 + \dfrac{x_2}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}(x_2)^2 > 0$.

Următoarea teoremă o completează pe cea precedentă.

4.2.21. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe I. Funcţia f este constantă pe I dacă şi numai dacă $f'(x) = 0$, oricare ar fi $x \in I$.*

Demonstraţie. Dacă funcţia f este constantă pe I, $f(x) = k, \forall x \in I$ unde $k \in \mathbb{R}$, atunci

$$f'(x) = (k)' = 0, \forall x \in I.$$

Considerăm acum că are loc $f'(x) = 0, \forall x \in I$ şi arătăm că f este constantă. Fie $x_0 \in I$ fixat. Considerăm $x \in I$, $x \neq x_0$ arbitrar. Aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[a, b] = \begin{cases} [x, x_0], & \text{dacă } x < x_0 \\ [x_0, x], & \text{dacă } x_0 < x. \end{cases}$ Obţinem că există c situat strict între x şi x_0 astfel încât $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. De aici, doarece $f'(c) = 0$, obţinem că $f(x) - f(x_0) = 0$ adică $f(x) = f(x_0)$.

Cum $x \in I$, $x \neq x_0$ a fost arbitrar, egalitatea $f(x) = f(x_0)$ are loc pentru fiecare $x \in I$, deci funcţia f este constantă pe I.

Următoarea teoremă se referă la funcţii derivabile pe un interval având derivatele egale pe acel interval.

4.2.22. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile pe I. Dacă $f' = g'$ pe I, atunci funcţia $f - g$ este constantă pe I.*

Demonstraţie. Considerăm funcţia $h = f - g$, adică $h : I \to \mathbb{R}, h(x) = f(x) - g(x)$. Deoarece f şi g sunt derivabile pe I, deducem că h este derivabilă pe I şi $h'(x) = f'(x) - g'(x), \forall x \in I$. Cum f' şi g' sunt egale pe I, $f'(x) = g'(x), \forall x \in I$, rezultă că $h'(x) = 0, \forall x \in I$. Pe baza teoremei precedente funcţia h este constantă pe I. Dar $h = f - g$, aşadar funcţia $f - g$ este constantă pe I.

Există funcţii f derivabile pe un interval având derivata f' fără proprietatea de continuitate pe intervalul respectiv.

4.2.23. Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$ Funcţia f' nu are limită în $x_0 = 0$, prin urmare f' nu este continuă în $x_0 = 0$ şi f' nu este continuă pe $\mathbb{R}$.

Următoarea teoremă ne arată că derivata unei funcţii derivabile pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval. În demonstraţia teoremei utilizăm teorema lui Weierstrass şi teorema lui Fermat.

4.2.24. Teoremă (Teorema lui Darboux) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe I. Atunci derivata funcţiei f, funcţia $f' : I \to \mathbb{R}$, are proprietatea lui Darboux pe I.*

Demonstraţie. Dacă $f' : I \to \mathbb{R}$ este funcţie constantă, atunci evident f' are proprietatea lui Darboux pe I. Dacă f' nu este funcţie constantă pe I, atunci fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ cu $f'(x_1) \neq f'(x_2)$. Considerând arbitrar y_0 cuprins strict între $f'(x_1)$ şi $f'(x_2)$, avem de arătat existenţa unui $c \in (x_1, x_2)$ cu proprietatea $f'(c) = y_0$.

Definim funcţia $g : I \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - y_0 \cdot x$. Din faptul că f este derivabilă pe I, rezultă că g este derivabilă pe I şi $g' : I \to \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) - y_0$. Deci g este derivabilă pe $[x_1, x_2]$. Prin urmare g este continuă pe intervalul închis $[x_1, x_2]$. Aplicând teorema lui Weierstrass obţinem că există $x_* \in [x_1, x_2]$ în care g îşi realizează minimul relativ la $[x_1, x_2]$. Arătăm că $x_* \in (x_1, x_2)$. Pe baza teoremei lui Fermat rezultă că $g'(x_*) = 0$. Această egalitate se scrie $f'(x_*) - y_0 = 0$, aşadar există $c \in (x_1, x_2)$ cu proprietatea $f'(c) = y_0$, de exemplu $c = x_*$.

Să arătăm că $x_* \neq x_1$ şi $x_* \neq x_2$. Având $f'(x_1) \neq f'(x_2)$, înseamnă că $f'(x_1) < f'(x_2)$ sau $f'(x_1) > f'(x_2)$. Considerăm primul caz. În al doilea caz se raţionează în mod asemănător. Deoarece $f'(x_1) < y_0 < f'(x_2)$ şi $g'(x) = f'(x) - y_0$ avem $g'(x_1) < 0, g'(x_2) > 0$.

Din $g'(x_1) < 0$ şi $g'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1}$ deducem că există $\delta_1 > 0$ astfel încât $\dfrac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} < 0, \forall x \in (x_1, x_1 + \delta_1)$; rezultă că $g(x) < g(x_1), \forall x \in (x_1, x_1 + \delta_1)$, inegalitate ce ne spune că funcţia g îşi realizează minimul relativ la $[x_1, x_2]$ într-un punct diferit de x_1, aşadar $x_* \neq x_1$.

Din $g'(x_2) > 0$ şi $g'(x_2) = \lim\limits_{x \to x_2} \dfrac{g(x) - g(x_2)}{x - x_2}$ deducem că există $\delta_2 > 0$ astfel încât $\dfrac{g(x) - g(x_2)}{x - x_2} > 0, \forall x \in (x_2 - \delta_2, x_2)$; rezultă că $g(x) < g(x_2), \forall x \in (x_2 - \delta_2, x_2)$, inegalitate ce ne spune că g îşi realizează minimul relativ la $[x_1, x_2]$ într-un punct diferit de x_2, aşadar $x_* \neq x_2$.

Următoarele două teoreme de utilitate practică sunt consecinţe imediate ale teoremei lui Darboux în combinaţie cu Teorema 4.2.17, şi respectiv Teorema 3.4.26.

4.2.25. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe I.*

i) Dacă $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ şi $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$, atunci există $c \in (x_1, x_2)$ cu $f'(c) = 0$.

ii) Dacă f' nu se anulează în nici un punct al intervalului I, atunci f' păstrează acelaşi semn pe I, iar f este strict monotonă pe I.

4.2.26. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe I. Atunci derivata funcţiei f, funcţia $f' : I \to R$ poate să aibă puncte de discontinuitate numai de speţa a doua.*

Următoarele două teoreme se utilizează la calculul limitelor unor fracţii.

4.2.27. Teoremă (Cauchy) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile în punctul $x_0 \in I$. Dacă*

i) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

ii) $g'(x_0) \neq 0$,

atunci există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $g'(x) \neq 0, \forall x \in U \setminus \{x_0\}$ şi există limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Demonstraţie. Din $g'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq 0$ rezultă că există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq 0, \forall x \in U \setminus \{x_0\}$. Rezultă că $g(x) \neq g(x_0) = 0, \forall x \in U \setminus \{x_0\}$.

Pentru $x \in U \setminus \{x_0\}$, ţinând cont că $f(x_0) = g(x_0) = 0$ şi $g(x) - g(x_0) \neq 0$, exprimăm fracţia $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ astfel $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \dfrac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)}$. Din

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)}, \forall x \in U \setminus \{x_0\},$$

ţinând cont că $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) \neq 0$, rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g'(x_0)}.$$

4.2.28. Teoremă (Teorema lui l'Hospital) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un punct de acumulare pentru I şi $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă*

i) funcţiile f, g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$,

ii) $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$,

iii) există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

iv) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

atunci există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *şi* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Demonstraţie. Considerăm $x_0 \in \mathbb{R}$. Definim funcţiile $F, G : I \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in I \setminus \{x_0\} \\ 0, & \text{dacă } x = x_0 \end{cases} \text{ şi } G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } x \in I \setminus \{x_0\} \\ 0, & \text{dacă } x = x_0. \end{cases}$$

Avem $F'(x) = f'(x), G'(x) = g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$. Funcţiile F, G sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$. Din $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = F(x_0)$, respectiv $\lim\limits_{x \to x_0} G(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 = G(x_0)$, rezultă că funcţiile F şi G sunt continue în punctul x_0.

Fie $x \in I \setminus \{x_0\}$ arbitrar. Pe intervalul $[x, x_0]$ sau $[x_0, x]$, după cum $x < x_0$, respectiv $x > x_0$, sunt îndeplinite condiţiile teoremei lui Cauchy cu privire la funcţiile F şi G, deci există c_x cuprins strict între x şi x_0 astfel încât $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \dfrac{F'(c_x)}{G'(c_x)}$. Această egalitate, ştiind că

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ şi } \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

se scrie $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$. Dacă $x \to x_0$, atunci $c_x \to x_0$ (deoarece c_x este situat strict între x şi x_0), astfel din iii) şi egalitatea $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$, deducem $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c_x \to x_0} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Dacă

$x_0 = -\infty$ sau $x_0 = +\infty$ pentru a demonstra concluzia teoremei se poate proceda la schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1}{t}$ şi atunci $x \to x_0$ revine la $t \to 0$.

4.2.29. Exemplu. Ca aplicaţie, utilizând teorema lui l'Hospital, calculăm limita şirului $a_n = n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$. Avem

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{n}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\\
&\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}x^{\frac{1}{x}-1} + x^{\frac{1}{x}}\ln x\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}(\ln x - 1) = +\infty\,(+\infty - 1) = +\infty.
\end{aligned}$$

Am ţinut cont că $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$, deoarece utilizând teorema lui l'Hospital $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = 0.$

4.2.30. Observaţie. Poate exista $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ fără ca limita $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ să existe.

4.2.31. Exemplu. În cazul funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\\ 0, & \text{dacă } x = 0\end{cases}$

şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x$, avem $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ şi $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{1}$ nu există.

4.3 Derivate de ordin superior

Definiţia 4.3.1. Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$, x_0 punct de acumulare pentru D.

i) Spunem că **funcţia** f **este de două ori derivabilă în punctul** x_0 dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât funcţia f este derivabilă pe mulţimea $D\cap U$ şi dacă funcţia $f' : D\cap U \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0. Derivata în punctul x_0 a funcţiei $f' : D\cap U\to\mathbb{R}$ se numeşte **derivata de ordinul doi în punctul** x_0 **a funcţiei** f şi se notează $f''(x_0)$ sau $f^{(2)}(x_0)$ sau $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$.

ii) Dacă funcţia f este de două ori derivabilă în fiecare punct $x \in D_0$, unde $D_0 \subset D, D_0$ mulţime nevidă, atunci spunem că funcţia f este de două ori derivabilă pe mulţimea D_0. În acest caz funcţia care fiecărui $x \in D_0$ ataşează $f''(x)$ se numeşte **derivata de ordinul doi pe mulţimea** D_0 **a funcţiei** f şi se notează $f'' : D_0 \to \mathbb{R}$, pe scurt f'' sau $f^{(2)}$ sau $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

iii) Fie $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Spunem că **funcţia** f **este de** n **ori derivabilă în punctul** x_0 dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât funcţia f este de $n-1$ ori derivabilă pe mulţimea $D\cap U$ şi dacă derivata de ordinul $n-1$ pe mulţimea $D\cap U$ a funcţiei f, notată $f^{(n-1)} : D\cap U\to\mathbb{R}$, este derivabilă în punctul x_0. Derivata în punctul x_0 a funcţiei $f^{(n-1)} : D\cap U\to\mathbb{R}$ se numeşte **derivata de ordinul** n **în punctul** x_0 **a funcţiei** f şi se notează $f^{(n)}(x_0)$ sau $\dfrac{d^n f}{dx^n}(x_0)$.

iv) Fie $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Dacă funcţia f este de n ori derivabilă în fiecare punct $x \in D_0$ unde $D_0 \subset D, D_0$ mulţime nevidă, atunci spunem că funcţia f este de n ori derivabilă pe mulţimea D_0. În acest caz funcţia

care fiecărui $x \in D_0$ ataşează $f^{(n)}(x)$ se numeşte **derivata de ordinul n pe mulţimea D_0 a funcţiei** f şi se notează $f^{(n)} : D_0 \to \mathbb{R}$, pe scurt $f^{(n)}$ sau $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

v) Prin convenţie considerăm $f^{(0)} = f$.

vi) Dacă funcţia f pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este de n ori derivabilă pe mulţimea $D_0 \subset D$, atunci spunem că funcţia f este **ori de câte ori derivabilă pe mulţimea** D_0 sau că **funcţia f este indefinit derivabilă pe mulţimea** D_0.

vii) Spunem că funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de n ori derivabilă dacă funcţia f este de n ori derivabilă în fiecare punct $x_0 \in D$.

Următoarea teoremă referitoare la derivabilitatea de ordinul n într-un punct a funcţiei sumă şi a funcţiei produs se obţine prin inducţie matematică pornind de la i) respectiv ii) din Teorema 4.1.16.

4.3.2. Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare pentru mulţimea D. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.*

i) Dacă funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}$ sunt de n ori derivabile în punctul x_0, atunci funcţia sumă $f + g$ este de n ori derivabilă în punctul x_0 şi are loc

$$(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0).$$

ii) (Leibniz) Dacă funcţiile $f, g : D \to R$ sunt de n ori derivabile în punctul x_0, atunci funcţia produs $f \cdot g$ este de n ori derivabilă în punctul x_0 şi are loc egalitatea

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(n}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)\, g(x_0) + C_n^1 f^{(n-1)}(x_0)\, g'(x_0) + C_n^2 f^{(n-2)}(x_0)\, g^{(2)}(x_0) \\ &+ \ldots + C_n^k f^{(n-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0) + \ldots + C_n^n f(x_0)\, g^{(n)}(x_0).\end{aligned}$$

iii) Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este de n ori derivabilă în punctul x_0 atunci funcţia $c \cdot f$, unde $c \in \mathbb{R}$, este de n ori derivabilă în punctul x_0 şi are loc

$$(c \cdot f)^{(n)}(x_0) = c \cdot f^{(n)}(x_0).$$

4.3.3. Exemplu. i) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$, prin derivări succesive şi inducţie matematică rezultă

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n a^n n! \frac{1}{(ax+b)^{n+1}}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}, n \in \mathbb{N} \\
&(\ln(ax+b))^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n (n-1)! \frac{1}{(ax+b)^n}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}, n \in \mathbb{N}^* \\
&\left(e^{ax+b}\right)^{(n)} = a^n e^{ax+b}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \\
&(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + n\frac{\pi}{2}\right), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \\
&(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos\left(ax + b + n\frac{\pi}{2}\right), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

ii) Pentru funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{-2x} \sin x$ calculăm $\varphi^{(2006)}(\pi)$ utilizând formula lui Leibniz. Notăm $f(x) = e^{-2x}, g(x) = \sin x$. Avem $f^{(k)}(\pi) = (-2)^k e^{-2\pi}, g^{(k)}(\pi) = \sin\left(\pi + k\frac{\pi}{2}\right)$. Obţinem

$$\begin{aligned}
f^{(2006)}(\pi) &= \sum_{i=0}^{2006} C_{2006}^i (-2)^{2006-i} e^{-2\pi} \sin\left(\pi + i\frac{\pi}{2}\right) = e^{-2\pi} \sum_{i=0}^{2006} (-1)^{i+1} C_{2006}^i 2^{2006-i} \sin\left(i\frac{\pi}{2}\right) \\
&= e^{-2\pi} \sum_{j=0}^{1002} (-1)^j C_{2006}^{2j+1} 2^{2006-(2j+1)},
\end{aligned}$$

deoarece $\sin(i\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } i = 2j \\ (-1)^j, \text{ dacă } i = 2j+1. \end{cases}$

Următoarea teoremă referitoare la limita unei fracţii se obţine prin inducţie matematică pornind de la Teorema 4.2.27.

4.3.4. Teoremă (Cauchy) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $n \in \mathbb{N}^*$ fixat şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile de n ori în punctul $x_0 \in I$. Dacă*

i) $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0, \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

ii) $g^{(n)}(x_0) \neq 0$.

atunci există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$.

Următoarea teoremă referitoare la limita unei fracţii se obţine prin inducţie matematică pornind de la teorema lui l'Hospital prezentată în paragraful anterior.

4.3.5. Teoremă (Teorema lui l'Hospital cu derivate de ordin superior) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un punct de acumulare pentru I, $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ două funcţii şi $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Dacă*

i) funcţiile f, g sunt de n ori derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$,

ii) $g^{(n)}(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$,

iii) există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

iv) $\lim\limits_{x \to x_0} f^{(k)}(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g^{(k)}(x) = 0, \forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$,

atunci există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *şi* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

4.3.6. Exemplu.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}{e^x} &\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)'}{(e^x)'} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{e^x} \\
&\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)'}{(e^x)'} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}}{e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \ldots \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.
\end{aligned}
$$

4.4 Funcţii convexe

O clasă importantă de funcţii este cea a funcţiilor convexe.

4.4.1. Definiţie. Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $I \subset D$ un interval.

i) Spunem că **funcţia f este convexă pe** I dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$ şi pentru orice $t \in (0,1)$ are loc

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t) f(x_1) + tf(x_2).$$

ii) Spunem că **funcţia f este strict convexă pe** I dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$ şi pentru orice $t \in (0,1)$ are loc

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t) f(x_1) + tf(x_2).$$

iii) Spunem că **funcţia f este concavă pe** I dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$ şi pentru orice $t \in (0,1)$ are loc

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t) f(x_1) + tf(x_2).$$

iv) Spunem că **funcţia f este strict concavă pe I** dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$ şi pentru orice $t \in (0, 1)$ are loc

$$f((1-t)x_1 + tx_2) > (1-t)\, f(x_1) + tf(x_2).$$

Dacă D este interval şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este (strict) convexă sau (strict) concavă pe D, atunci spunem că funcţia f este (strict) convexă, respectiv (strict) concavă. Din Definiţia 4.4.1 rezultă că funcţia f este (strict) concavă pe I dacă şi numai dacă funcţia $-f$ este (strict) convexă pe I. Din Definiţia 4.4.1 rezultă că o funcţie f strict convexă (strict concavă) pe I este convexă (concavă) pe I. Afirmaţia reciprocă nu are loc.

4.4.2. Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ este convexă pe $\mathbb{R}$ şi nu este strict convexă pe $\mathbb{R}$; în acelaşi timp funcţia f este concavă pe $\mathbb{R}$ şi nu este strict concavă pe $\mathbb{R}$.

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ este strict convexă pe $\mathbb{R}$.

Interpretare geometrică. Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Considerăm graficul funcţiei f şi punctele $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ ale graficului unde $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Fie $t \in (0, 1)$ şi $x_t = (1-t)x_1 + tx_2$. Studiem punctele $(x_t, f(x_t))$ respectiv $(x_t, (1-t)f(x_1) + tf(x_2))$.

Din $t \in (0, 1)$ şi $x_1 < x_2$ rezultă că $x_1 < (1-t)x_1 + tx_2 < x_2$, deci $x_t \in (x_1, x_2) \subset I$. Cum $x_t \in I$, punctul $(x_t, f(x_t))$ aparţine graficului funcţiei f, şi deoarece $x_1 < x_t < x_2$, el este situat pe arcul de grafic cuprins strict între punctele A şi B.

Deoarece punctul $((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)f(x_1) + tf(x_2)))$ verifică ecuaţia dreptei AB, el aparţine dreptei AB, şi deoarece $x_1 < (1-t)x_1 + tx_2 < x_2$, el este situat pe segmentul delimitat de punctele A, B, strict între A şi B.

Pe baza celor menţionate mai sus interpretăm inegalităţile din Definiţia 4.4.1.

În cazul unei funcţii convexe (concave) oricare ar fi două puncte distincte ale graficului, arcul de grafic delimitat de aceste două puncte este situat sub (deasupra) segmentul de dreaptă delimitat de cele două puncte. În cazul unei funcţii strict convexe (strict concave) oricare ar fi două puncte distincte ale graficului, arcul de grafic cuprins strict între aceste două puncte este situat strict sub (strict deasupra) segmentul de dreaptă delimitat de cele două puncte.

Următoarea teoremă evidenţiază o proprietate importantă a funcţiilor convexe care sunt derivabile într-un punct.

4.4.3. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi funcţia $f : I \to R$ convexă pe I. Dacă funcţia f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, atunci*

$$f'(x_0)(x - x_0) \le f(x) - f(x_0), \forall x \in I.$$

Demonstraţie. Considerăm $x \in I, x \ne x_0$. Deoarece funcţia f este convexă pe I, pentru fiecare $t \in (0, 1)$ are loc inegalitatea $f((1-t)x_0 + tx)) \le (1-t)\, f(x_0) + tf(x)$. Scriind această inegalitatea în forma $f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0) \le t(f(x) - f(x_0))$ şi apoi

$$\frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{(x_0 + t(x - x_0)) - x_0}(x - x_0) \le f(x) - f(x_0),$$

prin trecere la limită în ultima inegalitate rezultă

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{(x_0 + t(x - x_0)) - x_0}(x - x_0) \le f(x) - f(x_0).$$

Ţinând cont că funcţia f este derivabilă în punctul x_0 şi deci $\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{(x_0 + t(x - x_0)) - x_0} = f'(x_0)$, obţinem $f'(x_0)(x - x_0) \le f(x) - f(x_0)$.

Interpretare geometrică. Dacă funcţia f este derivabilă în x_0, atunci graficul funcţiei admite dreaptă tangentă în punctul $(x_0, f(x_0))$, şi anume dreapta de ecuaţie $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Ordonata punctului de abscisă $x \in I$ al acestei drepte este $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Ordonata punctului de aceeaşi abscisă pe grafic este $f(x)$. Aşadar teorema afirmă că punctele de abscisă $x \in I$ ale unei drepte tangente la graficul funcţiei convexe $f : I \to \mathbb{R}$ sunt situate sub graficul funcţiei.

Teoremele următoare se utilizează pentru studiul convexităţii funcţiilor derivabile pe un interval.

4.4.4. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe I. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) Funcţia f este convexă pe I,

(ii) Pentru orice $x_1, x_2 \in I$ are loc $f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1)$,

(iii) Derivata f' este funcţie crescătoare pe I.

Demonstraţie. Implicaţia *(i)⇒(ii)* este adevărată pe baza teoremei precedente.

Arătăm că *(ii)⇒(i)*. Fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Pentru $t \in (0,1)$ rezultă $(1-t)x_1 + tx_2 \in I$. Pe baza ipotezei (ii) avem

$$\begin{array}{l} f'((1-t)x_1 + tx_2)[x_1 - ((1-t)x_1 + tx_2)] \leq f(x_1) - f((1-t)x_1 + tx_2) \\ f'((1-t)x_1 + tx_2)[x_2 - ((1-t)x_1 + tx_2)] \leq f(x_2) - f((1-t)x_1 + tx_2) \end{array}$$

Înmulţim prima relaţie cu $(1-t)$, a doua relaţie cu t, şi apoi le adunăm. Obţinem

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t) f(x_1) + tf(x_2),$$

adică inegalitatea din definiţia funcţiei convexe.

Arătăm că *(ii)⇒(iii)*. Fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Pe baza ipotezei (ii) avem inegalităţile

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1),$$

respectiv

$$f'(x_2)(x_1 - x_2) \leq f(x_1) - f(x_2),$$

care prin adunare conduc la $(f'(x_1) - f'(x_2))(x_2 - x_1) \leq 0$ şi de aici, după împărţire cu $(x_2 - x_1)$ obţinem $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Aşadar funcţia f' este crescătoare.

Arătăm că (iii)⇒(ii). Fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Pe baza teoremei lui Lagrange există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Pe baza ipotezei (iii) funcţia f' este crescătoare, deducem $f'(x_1) \leq f'(c)$, şi deci $f'(x_1) \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Prin înmulţire cu $(x_2 - x_1)$ obţinem

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1).$$

Interpretare geometrică. Teorema afirmă că o funcţie derivabilă pe un interval I este convexă pe I dacă şi numai dacă punctele de abscisă $x \in I$ ale dreptelor tangente la graficul funcţiei sunt situate sub graficul funcţiei.

Următoarea teoremă se demonstrează în mod asemănător.

4.4.5. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe I. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) Funcţia f este strict convexă pe I,

(ii) Pentru orice $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ are loc $f'(x_1)(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1)$,

(iii) Derivata f' este funcţie strict crescătoare pe I.

4.4.6. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ convexă pe I. Dacă funcţia f este derivabilă de două ori în punctul $x_0 \in I$, atunci $f''(x_0) \geq 0$.*

Demonstraţie. Pe baza definiţiei derivabilităţii de ordinul doi a funcţiei f în punctul x_0, există $\epsilon > 0$ astfel încât funcţia f este derivabilă pe $I \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ şi funcţia $f' : I \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0, adică există

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Deoarece mulţimea $I \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ este interval şi f este convexă pe acest interval, pe baza teoremei precedente derivata $f' : I \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}$ este funcţie crescătoare, aşadar pentru orice $x \in I \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ are loc $\dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ şi prin urmare $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

4.4.7. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă de două ori pe I. Funcţia f este convexă pe I dacă şi numai dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.*

Demonstraţie. Dacă funcţia f de două ori derivabilă pe I este convexă pe I, atunci pe baza teoremei precedente, pentru fiecare $x \in I$ are loc $f''(x) \geq 0$. Dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$, atunci funcţia $f' : I \to \mathbb{R}$ este crescătoare şi aplicând Teorema 4.4.4 rezultă că funcţia f este convexă pe I.

4.4.8. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă de două ori pe I. Dacă $f''(x) > 0, \forall x \in I$, atunci funcţia f este strict convexă pe I.*

Demonstraţie. Din $f''(x) > 0, \forall x \in I$ rezultă că derivata f' este strict crescătoare, şi atunci, pe baza Teoremei 4.4.5, funcţia f este strict convexă pe I.

4.4.9. Observaţie. Reciproca Teoremei 4.4.8 nu are loc. Există funcţii f derivabile de două ori pe un interval I şi strict convexe pe I fără ca funcţia f'' să fie srtict pozitivă pe I.

4.4.10. Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4$ este strict convexă pe $\mathbb{R}$. Derivata de ordinul doi $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 12x^2$ nu este strict pozitivă pe $\mathbb{R}$, se anulează în $x_0 = 0$.

Teoremele 4.4.3-4.4.8 au analoage cu privire la o funcţie f concavă, inegalităţile fiind inversate pentru acest caz. Enunţăm aceste rezultate pentru ultimele două teoreme menţionate.

4.4.11. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă de două ori pe I. Funcţia f este concavă pe I dacă şi numai dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$.*

4.4.12. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă de două ori pe I. Dacă $f''(x) < 0, \forall x \in I$, atunci funcţia f este strict concavă pe I.*

4.4.13. Definiţie. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Spunem că $x_0 \in I$ este **punct de inflexiune** pentru f, dacă există $\epsilon > 0$ astfel încât

i) $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$ (adică x_0 este punct interior al intervalului I),

ii) funcţia f este continuă în x_0,

iii) funcţia f are derivată în x_0 (finită sau nu),

iv) funcţia f este convexă pe $(x_0 - \epsilon, x_0]$ şi este concavă pe $[x_0, x_0 + \epsilon)$, sau invers.

4.4.14. Exemplu. i) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ este derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$, $f''(x) = 6x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Din $f''(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 0]$ rezultă că funcţia f este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$, iar din $f''(x) \geq 0, \forall x \in [0, +\infty)$ rezultă că funcţia f este convexă pe intervalul $[0, +\infty)$. Funcţia f este continuă în $x_0 = 0$, are derivată în $x_0 = 0$ care este punct interior al lui $\mathbb{R}$, aşadar $x_0 = 0$ este punct de inflexiune pentru f.

ii) Funcţia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$ este derivabilă de două ori pe $[0, 2\pi]$ şi $f''(x) = -\sin x$, pentru orice $x \in [0, 2\pi]$. Din $f''(x) \leq 0, \forall x \in [0, \pi]$ rezultă că funcţia f este concavă pe intervalul $[0, \pi]$, iar din $f''(x) \geq 0, \forall x \in [\pi, 2\pi]$ rezultă că funcţia f este convexă pe intervalul $[\pi, 2\pi]$. Evident f este continuă în $x_0 = 0$ şi are derivată în $x_0 = 0$ care este punct interior al intervalului $[0, 2\pi]$, aşadar $x_0 = 0$ este punct de inflexiune pentru f.

4.4.15. Observaţie. Conform definiţiei punctului de inflexiune continuitatea funcţiei f într-un punct de inflexiune x_0 cât şi existenţa derivatei $f'(x_0)$ sunt esenţiale.

4.4.16. Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, x < 1 \\ x^2, x \geq 1 \end{cases}$ este concavă pe $(-\infty, 1]$ şi este convexă pe $[1, +\infty)$, este continuă în $x_0 = 1$, dar nu are derivată în $x_0 = 1$. Punctul $x_0 = 1$ nu este punct de inflexiune pentru f (de fapt $(1, f(1))$ este punct unghiular al graficului funcţiei).

Inegalitatea lui Jensen. Pornind de la Definiţia 4.4.1 i), notând $1 - t = t_1$, $t = t_2$ şi observând că $t_1, t_2 \in (0, 1), t_1 + t_2 = 1$, prin inducţie matematică deducem că dacă f este convexă pe I, atunci pentru fiecare $n \in \{2, 3, \ldots\}$ are loc inegalitatea

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \ldots + t_n f(x_n),$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ şi orice $t_1, t_2, \ldots, t_n \in (0, 1)$ cu $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$.

Acest rezultat este numit **Inegalitatea lui Jensen.** Pentru funcţii strict convexe inegalitatea este strictă. Pentru funcţii concave (strict concave) inegalitatea este inversată.

4.4.17. Exemplu. În continuare considerăm unghiurile măsurate în radiani şi arătăm că:

i) pentru orice triunghi ABC este valabilă inegalitatea $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

ii) pentru orice patrulater $ABCD$ este valabilă inegalitatea $\sin \dfrac{A}{2} + \sin \dfrac{B}{2} + \sin \dfrac{C}{2} + \sin \dfrac{D}{2} \leq 2\sqrt{2}$.

Fie $f:[0,\pi]\to[-1,1]\,, f(x)=\sin x$. Calculăm derivatele funcţiei $f'(x)=\cos x, f''\left(x\right)=-\sin x\leq 0,\forall x\in[0,\pi]$, deci f este concavă pe $[0,\pi]$. Cu inegalitatea lui Jensen corespunzătoare lui $n=3$, aplicată funcţiei concave f pentru $x_1=A, x_2=B, x_3=C$ şi $t_1=t_2=t_3=\frac{1}{3}$, adică $f(\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C)\geq\frac{1}{3}f\left(A\right)+\frac{1}{3}f\left(B\right)+\frac{1}{3}f\left(C\right)$, ştiind că $A+B+C=\pi$, obţinem $\sin\frac{\pi}{3}\geq\frac{1}{3}\sin A+\frac{1}{3}\sin B+\frac{1}{3}\sin C$; cu $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, după înmulţire cu 3, rezultă inegalitatea i).

Fie $g:[0,2\pi]\to[-1,1]\,, g(x)=\sin\frac{x}{2}$. Calculăm derivatele funcţiei g şi avem $g'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, $g''\left(x\right)=-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}\leq 0,\forall x\in[0,2\pi]$, deci g este concavă pe $[0,2\pi]$. Cu inegalitatea lui Jensen corespunzătoare lui $n=4$, aplicată funcţiei concave g pentru $x_1=A, x_2=B, x_3=C, x_4=D$ şi $t_1=t_2=t_3=t_4=\frac{1}{4}$, adică $f(\frac{1}{4}A+\frac{1}{4}B+\frac{1}{4}C+\frac{1}{4}D)\geq\frac{1}{4}f\left(A\right)+\frac{1}{4}f\left(B\right)+\frac{1}{4}f\left(C\right)+\frac{1}{4}f\left(D\right)$, ştiind că $A+B+C+D=2\pi$, obţinem $\sin\frac{\pi}{4}\geq\frac{1}{4}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{B}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{D}{2}$; cu $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, după înmulţire cu 4, rezultă inegalitatea ii).

Următoarele teoreme arată câteva proprietăţi importante ale funcţiilor convexe legate de continuitate şi derivabilitatea laterală.

4.4.18. Definiţie. Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie. Pentru $x_0\in I$ fixat considerăm funcţia $p_{x_0}:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$, $p_{x_0}\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$ numită **funcţia pantă**.

4.4.19. Teoremă. *Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie.*

i) Dacă funcţia f este convexă pe I, atunci pentru orice $x_0\in I$ funcţia pantă p_{x_0} este crescătoare.

ii) Dacă funcţia f este strict convexă pe I, atunci pentru orice $x_0\in I$ funcţia pantă p_{x_0} este strict crescătoare.

Demonstraţie. i) Funcţia f fiind convexă pe I, pentru orice $x_1,x_2\in I$ şi pentru orice $t\in(0,1)$ are loc $f\left((1-t)\,x_1+tx_2\right)\leq(1-t)\,f\left(x_1\right)+tf\left(x_2\right)$. Fie $x_0\in I$ fixat şi fie $x_1<x_2\in I\setminus\{x_0\}$. Arătăm că $p_{x_0}\left(x_1\right)\leq p_{x_0}\left(x_2\right)$, adică

$$\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}\leq\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_0\right)}{x_2-x_0}.$$

Privind poziţia numerelor x_1,x_2 faţă de x_0 deosebim trei cazuri.

a) Dacă $x_0<x_1<x_2$ atunci are loc $x_1=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}x_0+\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}x_2$ şi pe baza inegalităţii din definiţia funcţiei convexe obţinem inegalitatea $f\left(x_1\right)\leq\underbrace{\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}}_{1-t}f\left(x_0\right)+\underbrace{\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}}_{t\in(0,1)}f\left(x_2\right)$ echivalentă cu $f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)\leq\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}\left(f\left(_2\right)-f\left(x_0\right)\right)$, adică $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}\leq\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_0\right)}{x_2-x_0}$.

b) Dacă $x_1<x_2<x_0$ atunci are loc $x_2=\frac{x_0-x_2}{x_0-x_1}x_1+\frac{x_2-x_1}{x_0-x_1}x_0$ şi pe baza inegalităţii din definiţia funcţiei convexe obţinem inegalitatea $f\left(x_2\right)\leq\underbrace{\frac{x_0-x_2}{x_0-x_1}}_{t\in(0,1)}f\left(x_1\right)+\underbrace{\frac{x_2-x_1}{x_0-x_1}}_{1-t}f\left(x_0\right)$ echivalentă cu $f\left(x_2\right)-f\left(x_0\right)\leq\frac{x_0-x_2}{x_0-x_1}\left(f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)\right)$, adică $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}\leq\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_0\right)}{x_2-x_0}$.

c) Dacă $x_1<x_0<x_2$ atunci are loc $x_0=\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}x_1+\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}x_2$ şi pe baza inegalităţii din definiţia funcţiei convexe, obţinem inegalitatea $f\left(x_0\right)\leq\underbrace{\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}}_{1-t}f\left(x_1\right)+\underbrace{\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}}_{t}f\left(x_2\right)$, echivalentă cu

$$\left(\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}+\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}\right)f\left(x_0\right)\leq\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}f\left(x_1\right)+\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}f\left(x_2\right),$$

ceea ce se scrie $(x_2 - x_0)(f(x_0) - f(x_1)) \le (x_0 - x_1)(f(x_2) - f(x_0))$, adică

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \le \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

4.4.20. Observaţie. În mod asemănător se demonstrează că dacă funcţia f este (strict) concavă pe intervalul I, atunci pentru orice $x_0 \in I$ funcţia pantă p_{x_0} este (strict) descrescătoare.

4.4.21. Teoremă. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă funcţia f este convexă pe I, atunci f este continuă în fiecare punct interior intervalului.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in I$, situat în interiorul intervalului I. Arătăm că funcţia f, convexă pe I, este continuă în x_0. Cum x_0 este punct interior lui I, există $\epsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$. Notând $x_0 - \frac{\epsilon}{2} = a$, $x_0 + \frac{\epsilon}{2} = b$, avem $a < x_0 < b$ şi $[a, b] \subset I$. Dacă funcţia f este convexă pe I, atunci funcţia pantă $p_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, p_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ este crescătoare, aşadar pentru orice $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$ are loc

$$\frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \le \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}.$$

Dacă notăm $M = \max\left\{\left|\frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}\right|, \left|\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}\right|\right\}$, deducem

$$|f(x) - f(x_0)| \le M |x - x_0|, \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\},$$

de unde rezultă continuitatea funcţiei f în punctul x_0.

4.4.22. Teoremă. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă pe (a, b). Atunci are loc*

i) $f'_s(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in (a, b)$,

ii) $f'_d(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in (a, b)$,

iii) funcţiile $f'_s : (a, b) \to \mathbb{R}, f'_d : (a, b) \to \mathbb{R}$ sunt crescătoare,

iv) $f'_s(x) \le f'_d(x), \forall x \in (a, b)$.

Demonstraţie. i), ii) Fie $x_0 \in (a, b)$ fixat. Cum funcţia f este convexă pe (a, b), funcţia pantă $p_{x_0} : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, p_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ este monotonă (crescătoare) pe mulţimea $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, aşadar funcţia p_{x_0} are limite laterale finite în punctul x_0: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} p_{x_0}(x) \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} p_{x_0}(x) \in \mathbb{R}$. Utilizăm definiţia derivatelor laterale şi obţinem

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} p_{x_0}(x) \in \mathbb{R} \text{ şi } f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} p_{x_0}(x) \in \mathbb{R}.$$

iii), iv) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$. Arătăm că $f'_s(x_1) \le f'_s(x_2)$. Utilizăm funcţiile pantă

$$p_{x_1} : (a, b) \setminus \{x_1\} \to \mathbb{R}, p_{x_1}(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, p_{x_2} : (a, b) \setminus \{x_2\} \to \mathbb{R}, p_{x_2}(x) = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Deoarece f este convexă pe (a, b), funcţiile p_{x_1}, p_{x_2} sunt crescătoare, aşadar considerând x', x'' astfel ca $a < x' < x_1 < x'' < x_2$ avem $\frac{f(x') - f(x_1)}{x' - x_1} \le \frac{f(x'') - f(x_1)}{x'' - x_1} \le \frac{f(x'') - f(x_2)}{x'' - x_2}$. Prin trecere la limită pentru $x' \to x_1$ şi $x'' \to x_2$ obţinem $\lim\limits_{\substack{x' \to x_1 \\ x' < x_1}} \frac{f(x') - f(x_1)}{x' - x_1} \le \lim\limits_{\substack{x'' \to x_2 \\ x'' < x_2}} \frac{f(x'') - f(x_2)}{x'' - x_2}$, adică $f'_s(x_1) \le f'_s(x_2)$.

Pentru a arăta că $f'_d(x_1) \le f'_d(x_2)$ se procedează în mod asemănător.

Prin trecere la limtă pentru $x' \to x_1$ şi pentru $x'' \to x_1$ obţinem

$$\lim_{\substack{x' \to x_1 \\ x' < x_1}} \frac{f(x') - f(x_1)}{x' - x_1} \le \lim_{\substack{x'' \to x_1 \\ x'' > x_1}} \frac{f(x'') - f(x_1)}{x'' - x_1},$$

adică $f'_s(x_1) \le f'_d(x_1)$.

4.5 Formula lui Taylor

4.5.1. Definiţie. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $n \in \mathbb{N}^*$ fixat şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in I$. Funcţia $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numeşte **polinomul lui Taylor de ordinul n ataşat funcţiei f** şi punctului x_0. Pentru $x \in I$ notând $f(x) - T_n(x)$ prin $R_n(x)$ are loc $f(x) = T_n(x) + R_n(x) \forall x \in I$, adică

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \forall x \in I \end{aligned}$$

formulă numită **formula lui Taylor corespunzătoare funcţiei f şi punctului** x_0.

Funcţia $R_n : I \to \mathbb{R}, R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ se numeşte **restul de ordinul n al formulei lui Taylor.**

Deoarece polinoamele sunt funcţii convenabile din punct de vedere computaţional, avem interesul să aproximăm numărul $f(x)$ prin $T_n(x)$, respectiv funcţia f prin polinomul T_n. Comportarea restului $R_n(x)$ pentru $x \in I$ ne arată calitatea acestor aproximări.

Următoarele două teoreme ne oferă reprezentări ale restului $R_n(x)$.

4.5.2. Teoremă (Formula lui Taylor cu restul lui Peano) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $n \in \mathbb{N}^*$ fixat şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in I$. Atunci există o funcţie $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continuă în x_0, cu $\varphi(x_0) = 0$, astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \varphi(x)\frac{(x - x_0)^n}{n!}, \forall x \in I \end{aligned}$$

Demonstraţie. Definim funcţia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ astfel:

$$\varphi(x) = \begin{cases} n!\dfrac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n}, & \text{dacă } x \in I \setminus \{x_0\} \\ 0, & \text{dacă } x = x_0, \end{cases}$$

unde

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Arătăm că funcţia φ astfel definită are proprietăţile menţionate în teoremă. Calculăm

$$T_n(x) + \frac{1}{n!}\varphi(x)(x - x_0)^n = T_n(x) + \frac{1}{n!}n!\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n}(x - x_0)^n = f(x), \forall x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Calculăm

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} n!\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = n! \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n}$$

utilizând teorema lui Cauchy privind calculul limitei unei fracţii cu ajutorul derivatelor de ordin superior, Teorema 4.3.4. Avem

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - T_n(x)) = f(x_0) - T_n(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0, \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^n = 0.$$

Funcţiile $R(x) = f(x) - T_n(x), Q(x) = (x - x_0)^n$ sunt derivabile de n ori în punctul x_0. Calculând $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ rezultă $R^{(k)}(x_0) = 0, \forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Evident $Q^{(k)}(x_0) = 0$, pentru orice $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ şi $Q^{(n)}(x_0) = n! \neq 0$. Pe baza teoremei menţionate obţinem

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = n! \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{Q(x)} = n! \frac{R^{(n)}(x_0)}{Q^{(n)}(x_0)} = n! \frac{0}{n!} = 0.$$

Comparăm cu $\varphi(x_0) = 0$ şi egalitatea $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$ ne spune că funcţia f este continuă în punctul x_0.

4.5.3. Observaţie. În ipotezele teoremei există o funcţie $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continuă în x_0, cu $\varphi(x_0) = 0$, astfel încât restul de ordinul n al formulei lui Taylor se reprezintă $R_n(x) = \varphi(x) \dfrac{(x - x_0)^n}{n!}$.

4.5.4. Teoremă (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis. Fie $n \in N$ fixat. Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă de $n+1$ ori pe I, atunci pentru orice două puncte distincte din I, $x, x_0 \in I, x \neq x_0$, există cel puţin un punct ξ situat strict între x şi x_0 astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Fixăm $x, x_0 \in I, x \neq x_0$. Determinăm $A \in \mathbb{R}$ din condiţia $R_n(x) = A(x - x_0)^{n+1}$, unde $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ şi apoi considerăm funcţia $\phi : I \to \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + A(x - t)^{n+1}.$$

Prin calcule simple găsim $\phi(x) = f(x)$,

$$\phi(x_0) = T_n(x) + A(x - x_0)^{n+1} = T_n(x) + R_n(x) = f(x),$$

aşadar $\phi(x) = \phi(x_0)$.

Din faptul că funcţia f este derivabilă de $n+1$ ori pe I rezultă că funcţia ϕ este derivabilă pe I:

$$\phi'(t) = f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}2(x - t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 + \ldots - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x - t)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k + \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x - t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - A(n+1)(x - t)^n, \forall t \in I$$

$$\phi'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - A(n+1)(x - t)^n, \forall t \in I.$$

Cu privire la funcţia ϕ sunt îndeplinite condiţiile teoremei lui Rolle pe intervalul $[x, x_0]$ dacă $x < x_0$, respectiv pe intervalul $[x_0, x]$ dacă $x_0 < x$, deci există cel puţin un punct ξ situat strict între x şi x_0 astfel încât $\phi'(\xi) = 0$. Ultima relaţie se scrie $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n - A(n+1)(x - \xi)^n = 0$ şi de aici obţinem $A = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. Prin urmare $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

4.5.5. Observaţie. În ipotezele teoremei există ξ situat strict între x şi x_0 astfel încât restul de ordinul n al formulei lui Taylor se reprezintă $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

4.5.6. Observaţie. Pentru f şi n date, punctul ξ evident depinde de x şi x_0. Punctul ξ se mai poate reprezenta în forma $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ cu $\theta \in (0, 1)$ convenabil ales.

4.5.7. Observaţie. Teorema precedentă pentru $n = 0$ coincide cu teorema lui Lagrange.

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în cazul particular $x_0 = 0$ ne dă următorul rezultat.

4.5.8. Teoremă (Formula lui MacLaurin) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis şi $0 \in I$. Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat. Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă de $n+1$ ori pe I, atunci pentru orice punct $x \in I, x \neq 0$ există cel puţin un punct ξ situat strict între x şi 0 astfel încât*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

4.5.9. Exemplu. i) Scriem formula lui MacLaurin de ordinul n pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$. Calculăm $f^{(k)}(x)=e^x, \forall k\in\mathbb{N}, f^{(k)}(0)=e^0=1, \forall k\in\mathbb{N}$. Obţinem formula

$$e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{k!}x^k+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

unde ξ este situat strict între x şi 0.

ii) Scriem formula lui MacLaurin de ordinul $2n$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

Avem $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right), \forall k\in\mathbb{N}$, şi $f^{(k)}(0)=\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & \text{dacă } k=2j\\ (-1)^j, & \text{dacă } k=2j+1\end{cases}$.
Obţinem formula

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots+(-1)^j\frac{1}{(2j+1)!}x^{(2j+1)}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}\\ &+ (-1)^n\frac{\sin\left(\xi+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1},\end{aligned}$$

unde ξ este situat strict între x şi 0.

iii) Scriem formula lui MacLaurin de ordinul $2n-1$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

Calculăm $f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right), \forall k\in\mathbb{N}$, deci $f^{(k)}(0)=\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & \text{dacă } k=2j+1\\ (-1)^j, & \text{dacă } k=2j\end{cases}$.
Obţinem formula

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots+(-1)^j\frac{1}{(2j)!}x^{(2j)}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}x^{2n-2}\\ &+ (-1)^n\frac{\cos(\xi+n\pi)}{(2n)!}x^{2n},\end{aligned}$$

unde ξ este situat strict între x şi 0.

iv) Aproximăm numărul $\sqrt[10]{e}$ utilizând formula i) cu $n=3$:

$$\sqrt[10]{e}=e^{\frac{1}{10}}=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{10}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{10}\right)^3+\frac{e^\xi}{4!}\left(\frac{1}{10}\right)^4, \; 0<\xi<\frac{1}{10}.$$

Prin omiterea termenului rest rezultă aproximarea

$$\sqrt[10]{e}\approx 1+\frac{1}{1!}\frac{1}{10}+\frac{1}{2!}\frac{1}{10^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{10^3}, \quad \text{deci } \sqrt[10]{e}\approx\frac{6631}{6000}.$$

Eroarea comisă la această aproximare se delimitează prin inegalitatea

$$\left|\frac{e^\xi}{4!}\frac{1}{10^4}\right|<\frac{e^{\frac{1}{10}}}{4!}\frac{1}{10^4}<\frac{e}{4!}\frac{1}{10^4}<\frac{3}{4!}\frac{1}{10^4}=\frac{1}{80000}.$$

v) Organizăm polinomul $P(x)=2x^5-4x^3+7x^2+2x-3$ ca sumă de puteri ale binomului $(x+2)$. În acest scop utilizăm formula lui Taylor de ordinul 5 cu $x_0=-2$.

$$\begin{aligned}P(x) &= P(-2)+\frac{P'(-2)}{1!}(x+2)+\frac{P''(-2)}{2!}(x+2)^2+\frac{P^{(3)}(-2)}{3!}(x+2)^3+\frac{P^{(4)}(-2)}{4!}(x+2)^4\\ &+ \frac{P^{(5)}(-2)}{5!}(x+2)^5+\frac{P^{(6)}(\xi)}{6!}(x+2)^6,\end{aligned}$$

unde ξ este situat strict între x şi -2.

Calculăm $P(-2) = -11$ şi derivatele $P'(x) = 10x^4 - 12x^2 + 14x + 2$, $P''(x) = 40x^3 - 24x + 14$, $P^{(3)}(x) = 120x^2 - 24$, $P^{(4)}(x) = 240x$, $P^{(5)}(x) = 240$, $P^{(6)}(x) = 0$; Obţinem $P'(-2) = 86$, $P''(-2) = -258$, $P^{(3)}(-2) = 456$, $P^{(4)}(-2) = -480$, $P^{(5)}(-2) = 240$, $P^{(6)}(\xi) = 0$. Scriem formula lui Taylor

$$P(x) = -11 + \frac{86}{1!}(x+2) + \frac{-258}{2!}(x+2)^2 + \frac{456}{3!}(x+2)^3 + \frac{-480}{4!}(x+2)^4 + \frac{240}{5!}(x+2)^5 + \frac{0}{6!}x^6.$$

Deci

$$2x^5 - 4x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 2(x+2)^5 - 20(x+2)^4 + 76(x+2)^3 - 129(x+2)^2 + 86(x+2) - 11.$$

4.6 Caracterizarea punctelor de optim ale unei funcţii cu ajutorul derivatelor

Considerăm o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă într-un punct x_0 din interiorul mulţimii D. Teorema lui Fermat afirmă că dacă funcţia f are optim local în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$. Din $f'(x_0) = 0$ însă, după cum ne arată şi Exemplul 4.2.6, nu rezultă că x_0 este punct de optim local pentru f.

Următoarea teoremă oferă condiţii suficiente pentru puncte de optim local apelând la derivatele de ordin superior ale funcţiei f în punctul x_0.

4.6.1. Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, x_0 un punct interior intervalului I, $n \in \{2, 3, \cdots\}$ fixat şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de n ori derivabilă în x_0 cu*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Au loc următoarele afirmaţii:

i) Dacă n este număr par atunci x_0 este punct de optim local relativ la I al funcţiei f, şi anume

· dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$, atunci x_0 este punct de maxim local,

· dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local.

ii) Dacă n este număr impar atunci x_0 nu este punct de optim local relativ la I al funcţiei f.

Demonstraţie. Funcţia f este derivabilă de n ori în punctul x_0. Scriem formula lui Taylor ataşată funcţiei f şi punctului x_0 cu restul lui Peano

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \varphi(x)\frac{(x-x_0)^n}{n!}, \forall x \in I \end{aligned}$$

cu funcţia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continuă în x_0 şi $\varphi(x_0) = 0$. Înlocuim aici $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ şi obţinem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \varphi(x)\frac{(x-x_0)^n}{n!}, \forall x \in I,$$

adică

$$f(x) - f(x_0) = \left[f^{(n)}(x_0) + \varphi(x)\right]\frac{(x-x_0)^n}{n!}, \forall x \in I.$$

Arătăm că există o vecinătate a punctului x_0 pe care funcţia $f^{(n)}(x_0) + \varphi(x)$ de variabilă x are semnul constant.

Funcţia φ continuă în punctul x_0 cu $\varphi(x_0) = 0$ are limita $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ şi rezultă că

$$\lim_{x \to x_0}\left[f^{(n)}(x_0) + \varphi(x)\right] = f^{(n)}(x_0).$$

Conform ipotezei $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$ atunci avem $\lim\limits_{x \to x_0}\left[f^{(n)}(x_0) + \varphi(x)\right] < 0$, inegalitate care implică existenţa unei vecinătăţi U a lui x_0 astfel ca $f^{(n)}(x_0) + \varphi(x) < 0, \forall x \in I \cap U \setminus \{x_0\}$.

Dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$, atunci avem $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f^{(n)}(x_0) + \varphi(x)\right] > 0$, inegalitate care implică existenţa unei vecinătăţi U a lui x_0 astfel ca $f^{(n)}(x_0) + \varphi(x) > 0, \forall x \in I \cap U \setminus \{x_0\}$.

i) Dacă numărul n este par, atunci $\dfrac{(x-x_0)^n}{n!} \geq 0, \forall x \in I$.

În cazul $f^{(n)}(x_0) < 0$ pentru orice $x \in I \cap U$ are loc

$$f(x) - f(x_0) = \left[f^{(n)}(x_0) + \varphi(x)\right]\frac{(x-x_0)^n}{n!} \leq 0.$$

Aşadar $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in I \cap U$, deci x_0 este punct de maxim local relativ la I al funcţiei f.

În cazul $f^{(n)}(x_0) > 0$ pentru orice $x \in I \cap U$ are loc

$$f(x) - f(x_0) = \left[f^{(n)}(x_0) + \varphi(x)\right]\frac{(x-x_0)^n}{n!} \geq 0.$$

Aşadar $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in I \cap U$, deci x_0 este punct de minim local relativ la I al funcţiei f.

ii) Dacă numărul n este impar, atunci funcţia $\dfrac{(x-x_0)^n}{n!}$ cu variabila x în orice vecinătate a lui x_0 realizează atât valori negative cât şi valori pozitive. Diferenţa

$$f(x) - f(x_0) = \left[f^{(n)}(x_0) + \varphi(x)\right]\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

cu variabila x, pe nici o vecinătate a lui x_0 nu păstrează un acelaşi semn, prin urmare x_0 nu este punct de minim local şi nici punct de maxim local al funcţiei f relativ la I.

4.6.2. Exemplu. i) Determinăm punctele de optim local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 e^x$. Calculăm derivatele

$$f'(x) = \left(3x^2 + x^3\right)e^x, f''(x) = \left(6x + 6x^2 + x^3\right)e^x, f'''(x) = \left(6 + 18x + 9x^2 + x^3\right)e^x$$

Punctele de optim local ale funcţiei f, conform teoremei lui Fermat, se găsesc printre punctele staţionare ale funcţiei, adică printre soluţiile ecuaţiei

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(3x^2 + x^3\right)e^x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -3.$$

Din $f'(0) = 0, f''(0) = 0, f'''(0) \neq 0$, deoarece numărul de derivări $n = 3$ este număr impar, rezultă că $x_1 = 0$ nu este punct de optim local al funcţiei f.

Din $f'(-3) = 0, f''(-3) \neq 0$, deoarece numărul de derivări $n = 2$ este număr par şi $f''(-3) > 0$ rezultă că $x_2 = -3$ este punct de minim local al funcţiei f.

ii) Determinăm punctele de optim local ale funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 e^x$. Calculăm derivatele

$$g'(x) = \left(4x^3 + x^4\right)e^x, g''(x) = \left(12x^2 + 8x^3 + x^4\right)e^x, g'''(x) = \left(24x + 36x^2 + 12x^3 + x^4\right)e^x,$$
$$g^{(4)}(x) = \left(24 + 96x + 72x^2 + 16x^3 + x^4\right)e^x.$$

Punctele de optim local ale funcţiei g, conform teoremei lui Fermat, se găsesc printre punctele staţionare ale funcţiei, adică printre soluţiile ecuaţiei

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(4x^3 + x^4\right)e^x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -4.$$

Din $g'(0) = 0, g''(0) = 0, g'''(0) = 0$, $g^{(4)}(0) \neq 0$, deoarece numărul de derivări $n = 4$ este număr par şi $g^{(4)}(0) > 0$, rezultă că $x_1 = 0$ este punct de minim local al funcţiei g.

Din $g'(-4) = 0, f''(-4) \neq 0$, deoarece numărul de derivări $n = 2$ este număr par şi $f''(-4) < 0$, rezultă că $x_2 = -4$ este punct de maxim local al funcţiei g.

Capitolul 5

Funcţii integrabile Riemann şi primitive

5.1 Funcţii integrabile. Integrala Riemann.

Noţiunea de integrală a apărut din necesitatea practică de a calcula aria unor figuri plane şi de-a rezolva anumite probleme de mecanică. Până la definiţia actuală a integralei dată de Riemann (1854) şi-au adus contribuţia la această definiţie mai mulţi matematicieni: Newton, Leibniz, Cauchy. Ulterior, conceptul de integrală a fost extins de Stieltjes şi Lebesgue, iar în secolul al XX-lea au apărut noi generalizări ale integralei datorate lui Denjoy, Peron, Kurzweil-Henstock, integrale care nu mai constituie obiectul studiului din această carte.

5.1.1 Definiţie. (Diviziune a unui interval compact). Fie $a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b$. Se numeşte **diviziune a intervalului compact** $[a,b]$, mulţimea ordonată de $n+1$ puncte $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$, notată

$$\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n),$$

cu proprietatea

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Vom nota cu $\mathrm{Div}[a,b]$ mulţimea tuturor diviziunilor intervalului $[a,b]$.

5.1.2 Definiţie. (Norma unei diviziuni). Dacă $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ este o diviziune a intervalului $[a,b]$, se numeşte **normă a diviziunii** Δ, numărul notat $\nu\,(\Delta)$ şi reprezentând lungimea celui mai mare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$ determinat de diviziunea Δ, adică

$$\nu(\Delta) := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{x_i - x_{i-1}\}.$$

5.1.3 Exemplu. Fie intervalul $[0,1]$ şi considerăm două diviziuni ale acestui interval

$$\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right); \quad \Delta_2 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right).$$

Normele acestor diviziuni sunt

$$\nu\,(\Delta_1) = \frac{1}{2}, \ \ \nu\,(\Delta_2) = \frac{1}{4}.$$

5.1.4 Observaţie. Pentru orice $\varepsilon > 0$, putem găsi o diviziune Δ a intervalului $[a,b]$ aşa ca $\nu(\Delta) < \varepsilon$.

Într-adevăr, dacă $\varepsilon > 0$ şi n este un număr natural astfel încât $\dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$, atunci diviziunea prin puncte echidistante

$$\Delta = \left(a,\ a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \ldots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\right),$$

are proprietatea că $\nu(\Delta) = \dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$.

5.1.5 Definiţie. Fie $\Delta, \Delta' \in$Div $[a,b]$, două diviziuni ale intervalului $[a,b]$. Spunem că diviziunea Δ, este **mai fină** decât divizuinea Δ' şi scriem $\Delta' \subset \Delta$ sau $\Delta \supset \Delta'$, dacă Δ conţine toate punctele diviziunii Δ' şi eventual şi puncte în plus.

5.1.6 Teoremă. *Dacă Δ este o diviziune a intervalului $[a,b]$ mai fină decât Δ', adică $\Delta \supset \Delta'$, atunci $\nu(\Delta) \leqslant \nu(\Delta')$.*

5.1.7 Observaţie. Reciproca teoremei 5.1.6 nu este, în general, adevărată, după cum se vede în exemplul următor:

$$\Delta \in \mathrm{Div}[0,1], \Delta = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\nu(\Delta) = \frac{1}{2}, \quad \Delta' \in \mathrm{Div}[0,1],$$

$$\Delta' = \left(0, \frac{1}{4}, 1\right), \ \nu(\Delta') = \frac{3}{4}.$$

Avem $\nu(\Delta) < \nu(\Delta')$, dar Δ nu este mai fină decât Δ'.

5.1.8 Definiţie. (Sistem de puncte intermediare). Fie $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a,b]$, $a < b$. Mulţimea de puncte $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ cu proprietatea că

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ oricare ar fi } i = \overline{1,n},$$

se numeşte **sistem de puncte intermediare** asociat diviziunii Δ. Evident, pentru o diviziune Δ dată, există oricâte sisteme de puncte intermediare asociate lui Δ. Vom nota cu $P(\Delta)$, mulţimea tuturor sistemelor de puncte intermediare asociate diviziunii Δ.

5.1.9 Definiţie. (Suma Riemann). Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie, $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ şi $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, un sistem de puncte intermediare asociat lui Δ. Se numeşte **sumă Riemann** (sau sumă integrală Riemann) asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare ξ, numărul

$$\sigma(f, \Delta, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{5.1.1.}$$

Este evident că, pentru funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, se pot construi o infinitate de sume Riemann, având în vedere că există oricâte diviziuni Δ ale intervalului $[a,b]$ şi pentru fiecare diviziune aleasă, există oricâte sisteme ξ de puncte intermediare asociate.

5.1.10 Observaţie. Dacă presupunem că intervalul $[a,b]$ este degenerat, adică $a = b$, atunci orice diviziune $\Delta \in$Div$[a,b]$ conţine puncte identice. Aşadar, $x_i = a$, $i = \overline{1,n}$, $x_i - x_{i-1} = 0$ şi $\sigma(f, \Delta, \xi) = 0$.

5.1.11 Definiţie. (Funcţie integrabilă, integrala Riemann). Spunem că funcţia $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ este **integrabilă Riemann pe $[a,\ b]$** (sau simplu, integrabilă) dacă există un număr real I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a,b]$, cu $\nu(\Delta) < \delta$ şi orice sistem de puncte intermediare $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in P\ (\Delta)$, să avem

$$|\,\sigma(f, \Delta, \xi\,) - I\,| < \varepsilon. \tag{5.1.2}$$

Numărul I se numeşte **integrala Riemann** a funcţiei f pe intervalul $[a,b]$ şi se notează

$$I := \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.1.3}$$

În această notaţie a, b se numesc **limite de integrare**, a se numeşte **limită inferioară**, b se numeşte **limită superioară**, f este **funcţia de sub semnul integrală** (sau funcţia de integrat), x se numeşte **variabilă de integrare**, iar dx arată deocamdată care este variabila de integrare

5.1.12 Observaţie. Este uşor de arătat că există cel mult un număr I care să satisfacă relaţia (5.1.2) şi dacă pentru orice $I \in \mathbb{R}$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $\delta > 0$ să existe $\Delta \in$Div$[a,\ b]$ cu $\nu(\Delta) < \delta$ şi un $\xi \in P(\Delta)$ încât

$$|\sigma(f, \Delta, \xi\,) - I\,| \geq \varepsilon,$$

atunci funcţia f nu este integrabilă Riemann.

Într-adevăr, dacă ar exista două numere I_1 şi I_2 care să satisfacă definiţia 5.1.11 atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$|\, I_1 - I_2 \,| = |\, I_1 - \sigma\ (f, \Delta, \xi\,) + \sigma\ (f, \Delta, \xi\,) - I_2 \,| \leqslant$$
$$\leqslant |\sigma\ (f, \Delta, \xi\,) - I_1 \,| + |\, \sigma\ (f, \Delta, \xi) - I_2 \,| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,,$$

deci $I_1 = I_2$.

5.1.13 Exemple. 1^0. Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = k =$ constant, pentru orice $x \in [a,\ b]$, este integrabilă pe $[a,\ b]$ şi avem

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b k\, dx = k(b-a). \tag{5.1.4}$$

Într-adevăr, dacă

$$\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Div}[a, b]$$

şi

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in P(\Delta),$$

suma Riemann asociată lui f, Δ, ξ, este

$$\begin{aligned} \sigma(f, \Delta, \xi) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k(x_n - x_0) = k(b-a), \end{aligned}$$

adică este constantă. Deci este clar că luând $I = k\,(b-a)$, pentru $\varepsilon > 0$, avem

$$|\, \sigma\ (f, \Delta, \xi\,) - I \,| = |\, k(b-a) - k(b-a) \,| = 0 < \varepsilon,$$

ceea ce arată că funcţia f este integrabilă pe $[a,\ b]$ şi are loc (5.1.4).

2^0. Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [a, b] \cap Q\,, \\ 1, & \text{dacă } x \in [a, b] \setminus Q\,, \end{cases}$$

numită funcţia lui Dirichlet, nu este integrabilă Riemann pe $[a,\ b]$.

Să presupunem contrarul, anume că f este integrabilă Riemann pe $[a,\ b]$. Atunci, după definiţia 5.1.11 există $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta\ (\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi o diviziune $\Delta \in \mathrm{Div}[a,\ b]$ cu $\nu(\Delta) < \delta$ şi pentru orice sistem de puncte intermediare $\xi \in P(\Delta)$ să avem

$$|\, \sigma(f, \Delta, \xi\,) - I \,| < \varepsilon.$$

Să presupunem că sistemul de puncte intermediare $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ este format din puncte raţionale $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$, $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$. Atunci

$$\sigma\,(f, \Delta, \xi\,) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\,(x_i - x_{i-1}) = 0,$$

astfel că pentru orice $\varepsilon > 0$.

$$|\sigma\,(f, \Delta, \xi\,) - I| = |\, I \,| < \varepsilon. \tag{5.1.5}$$

Să facem acum altă alegere pentru sistemul de puncte intermediare, anume să luăm $\xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$ $i = \overline{1, n}$, numere iraţionale. Atunci,

$$\sigma\,(f, \Delta, \xi\,) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'')\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a,$$

şi atunci
$$|\sigma\,(f,\Delta,\xi\,){-}I| = |\,b-a-I\,| < \varepsilon, \tag{5.1.6}$$
pentru orice $\varepsilon> 0$. Dacă $\varepsilon\ = \dfrac{1}{4}(b-a)$, cu (5.1.5) şi (5.1.6) găsim
$$b-a = |b-a-I+I\,| \leq |\,b-a-I\,| + |\,I\,| < \varepsilon+\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a),$$
adică am ajuns la o contradicţie. Aceasta arată că funcţia f nu este integrabilă.

5.1.14 Teoremă. *Dacă funcţia $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,\,b]$, atunci funcţia f este mărginită pe $[a,\,b]$, adică mulţimea $\{f(x)\ |x\in[a,b]\,\}\subset\mathbb{R}$ este mărginită.*

Demonstraţie. Să presupunem că f este integrabilă pe $[a,\,b]$. Atunci, există $I\in\mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon>0$, există $\delta>0$ aşa încât pentru $\Delta:=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in$Div$[a,\,b]$ cu $\nu(\Delta)<\delta$ şi orice $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}\in P(\Delta)$ să avem
$$|\,\sigma(f,\Delta,\xi){-}I\,| < \varepsilon.$$

Dacă luăm $\varepsilon=1$ şi fixăm diviziunea Δ, ultima inegalitate se poate scrie
$$1-I < \sigma\,(f,\Delta,\xi\,) < 1+I. \tag{5.1.7}$$

Să presupunem prin absurd că f nu este mărginită pe $[a,\,b]$. Atunci există un interval parţial $[x_{k-1},x_k]$ al diviziunii Δ pe care f nu este mărginită, să zicem că nu este majorată şi astfel
$$\sup\{f(x)\ |x\in[x_{k-1},x_k]\ \to\ = +\infty. \tag{5.1.8}$$

Să notăm cu
$$\omega := \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} f\,(\xi_i)\,f\,(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})\,. \tag{5.1.9}$$

Deoarece pe $[x_{k-1},x_k]$, f nu este mărginită, putem alege punctul $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ aşa ca
$$f(\xi_k) > \frac{I-\omega+2}{x_k-x_{k-1}}.$$
De aici
$$f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) > I-\omega\ +2, \tag{5.1.10}$$
şi putem scrie
$$\sigma\ (f,\Delta,\xi\ ) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \omega+f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) >$$
$$> \omega+I-\omega+2 = I+2 > 1+I,$$
adică
$$\sigma\ (f,\Delta,\,\xi) > 1+I. \tag{5.1.11}$$

Dar inegalitatea aceasta, contrazice inegalitatea (5.1.7) valabilă pentru diviziunea Δ. Această contradicţie arată că presupunerea făcută, anume că f este nemărginită pe $[a,\,b]$, este falsă şi deducem concluzia teoremei, că funcţia f este mărginită pe $[a,\,b]$.

5.1.15 Observaţie. Definiţia integrabilităţii Riemann 5.1.11 nu este comodă în practică, pentru a stabili dacă o funcţie este sau nu este integrabilă, deoarece în această definiţie apare în mod explicit integrala funcţiei, adică numărul I. De aceea, vom da câteva teoreme echivalente cu definiţia 5.1.11, teoreme care folosesc şiruri de diviziuni.

5.1.16 Teoremă. *Fie $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$, a,$b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia f să fie integrabilă Riemann pe $[a,b]$ şi $\int\limits_a^b f(x)\,d\,x = I$ este, ca pentru orice şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ ale intervalului $[a,b]$ cu $\lim\limits_{n\,\to\,\infty}\nu\,(\Delta_n) = 0$ şi pentru orice şir $(\xi^n)_{n\geq1}\in P(\Delta_n)$ de sisteme de puncte intermediare, şirul sumelor Riemann $(\sigma(f,\Delta_n,\xi^n))$ converge către numărul I.*

Demonstraţie. *"Necesitatea":* Presupunem că f este integrabilă pe $[a,b]$ şi $I=\int\limits_a^b f(x)dx$. Atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta(\varepsilon)>0$ aşa ca să avem

$$|\sigma(f,\Delta,\xi)-I|<\varepsilon, \tag{5.1.12}$$

pentru orice $\Delta\in$Div$[a,b]$ cu $\nu(\Delta)<\delta$ şi orice $\xi\in P(\Delta)$. Fie acum (Δ_n) un şir de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu proprietatea că $\nu(\Delta_n)\to 0$, când $n\to\infty$ şi fie (ξ^n) un şir de sisteme de puncte intermediare $\xi^n\in P(\Delta_n)$, $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă $\varepsilon>0$, din faptul că $\nu(\Delta_n)\to 0$, deducem că există un $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ aşa ca $\nu(\Delta_n)<\delta(\varepsilon)$ pentru $n\ge N(\varepsilon)$. Însă acum din (5.1.12), deducem că

$$|\sigma(f,\Delta_n,\xi^n)-I|<\varepsilon,$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\ge N(\varepsilon)$. Ultima relaţie arată că şirul $(\sigma(f,\Delta_n,\xi^n))$ converge către I, adică

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(f,\Delta_n,\xi^n)=I.$$

"Suficienţa": Să presupunem că pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) cu $\nu(\Delta_n)\to 0$, când $n\to\infty$ avem $\sigma(f,\Delta_n,\xi^n)\to I$, pentru orice $\xi^n\in P(\Delta_n)$ dar că f nu este integrabilă pe $[a,b]$. Deci există $\varepsilon>0$ aşa ca pentru orice $\delta>0$ există $\Delta\in$Div$[a,b]$ cu $\nu(\Delta)<\delta$ şi $\xi\in P(\Delta)$ aşa încât $|\sigma(f,\Delta,\xi)-I|\ge\varepsilon$. Să luăm $\delta=\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci pentru $n\in\mathbb{N}^*$ există diviziunea $\Delta_n\in$Div$[a,b]$ cu $\nu(\Delta_n)<\dfrac{1}{n}$ şi există $\xi^n\in P(\Delta_n)$ aşa ca să avem

$$|\sigma(f,\Delta_n,\xi^n)-I|\ge\varepsilon. \tag{5.1.13}$$

Însă, deoarece $\nu(\Delta_n)\to 0$, când $n\to\infty$, din ipoteză, deducem că $\sigma(f,\Delta_n,\xi^n)\to I$, ceea ce contravine inegalităţii (5.1.13).

Din această teoremă se deduce imediat următorul rezultat:

5.1.17 Corolar. Funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) ale intervalului $[a,b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(\Delta_n)=0$ şi pentru orice şir $\xi^n\in P(\Delta_n)$ de sisteme de puncte intermediare asociate lui $(\Delta_n$, şirul $(\sigma(f,\Delta_n,\xi^n))$ este convergent.

5.1.18 Teoremă. (Criteriu de tip Cauchy de integrabilitate Riemann). *Funcţia* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann pe intervalul* $[a,b]$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon>0$ *există* $\delta(\varepsilon)>0$ *astfel că oricare ar fi diviziunile* $\Delta',\Delta''\in$ Div$[a,b]$ *cu* $\nu(\Delta')<\delta$ *şi* $\nu(\Delta'')<\delta$ *şi oricare ar fi sistemele de puncte intermediare* $\xi'\in P(\Delta')$, $\xi''\in P(\Delta'')$ *avem*

$$|\sigma(f,\Delta',\xi')-\sigma(f,\Delta'',\xi'')|<\varepsilon. \tag{5.1.14}$$

Demonstraţie. *"Necesitatea"* Presupunem că f este integrabilă pe $[a,b]$ şi fie $\varepsilon>0$. Atunci există $I\in\mathbb{R}$ şi există $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât pentru orice $\Delta',\Delta''\in$ Div$[a,b]$ cu $\nu(\Delta')<\delta$, $\nu(\Delta'')<\delta$ şi orice $\xi'\in P(\Delta')$, $\xi''\in P(\Delta'')$ să avem

$$|\sigma(f,\Delta',\xi')-I|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ |\sigma(f,\Delta'',\xi'')-I|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Putem scrie

$$|\sigma(f,\Delta',\xi')-\sigma(f,\Delta'',\xi'')|=|(\sigma(f,\Delta',\xi')-I)+(I-\sigma(f,\Delta'',\xi'')|\le$$
$$\le|\sigma(f,\Delta',\xi')-I|+|\sigma(f,\Delta'',\xi'')-I|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

adică inegalitatea (5.1.14).

"Suficienţa": Presupunem satisfăcută condiţia (5.1.14) şi demonstrăm că f este integrabilă pe $[a,b]$. Fie (Δ_n) un şir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu $\nu(\Delta_n)\to 0$ când $n\to\infty$ şi $\xi^n\in P(\Delta_n)$ un şir de sisteme de puncte intermediare. Dacă $\varepsilon>0$, atunci există $\delta>0$ astfel încât $\Delta',\Delta''\in$Div$[a,b]$ cu $\nu(\Delta')<\delta$, $\nu(\Delta'')<\delta$ şi pentru $\xi'\in P(\Delta')$, $\xi''\in P(\Delta'')$ avem

$$|\sigma(f,\Delta',\xi')-\sigma(f,\Delta'',\xi'')|<\varepsilon.$$

Din faptul că $\nu(\Delta_n) \to 0$, când $n \to \infty$, există $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru $n \geq N(\varepsilon)$ să avem $\nu(\Delta_n) < \delta$. Fie $n, m \in \mathbb{N}$ aşa ca $n, m \geq N(\varepsilon)$. Atunci $\nu(\Delta_n) < \delta$ şi $\nu(\Delta_m) < \delta$ şi avem

$$|\sigma(f, \Delta_n, \xi^n) - \sigma(f, \Delta_m, \xi^m)| < \varepsilon,$$

ceea ce dovedeşte că şirul $(\sigma(f, \Delta_n, \xi^n))$ este un şir fundamental de numere reale şi deci el este convergent. Cu corolarul precedent se deduce că funcţia f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.
O condiţie oarecum simplificată, de integrabilitate Riemann, este dată de

5.1.19 Teoremă. *Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe intervalul $[a, b]$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ aşa încât pentru orice diviziune $\Delta \in$Div$[a, b]$ cu $\nu(\Delta) < \delta$ şi oricare ar fi sistemele de puncte intermediare $\xi', \xi'' \in P(\Delta)$, să avem*

$$|\sigma(f, \Delta, \xi') - \sigma(f, \Delta, \xi'')| < \varepsilon.$$

Renunţăm la demonstraţie.

5.2 Criteriul de integrabilitate al lui Darboux. Clase de funcţii integrabile

Vom da în cele ce urmează un criteriu de integrabilitate care foloseşte aşa numitele sume ale lui Darboux.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită pe $[a, b]$ şi având marginile

$$m := \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\},$$
$$M := \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Dacă $\Delta = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Div\,[a, b]$, deducem că f este mărginită pe fiecare interval parţial $[x_{i-1}, x_i]$. Vom nota atunci

$$m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

marginile funcţiei f pe $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$.

5.2.1 Definiţie. (Sumele lui Darboux). Numerele reale

$$\begin{aligned} s_\Delta(f) &= s(f, \Delta) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \\ S_\Delta(f) &= S(f, \Delta) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

se numesc **suma inferioară Darboux** asociată funcţiei f şi diviziunii Δ, respectiv **suma superioară Darboux** asociată funcţiei f şi diviziunii Δ.

5.2.2 Teoremă *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită pe $[a, b]$ şi are marginile m, M atunci pentru orice diviziune $\Delta \in$Div$[a, b]$ şi orice sistem de puncte intermediare $\xi \in P(\Delta)$, avem*

$$m(b-a) \leq s(f, \Delta) \leq \sigma(f, \Delta, \xi) \leq S(f, \Delta) \leq M(b-a). \tag{5.2.1}$$

Demonstraţia este imediată, dacă se ţine seama de definiţia sumelor Darboux $s(f, \Delta)$ şi $S(f, \Delta)$, a sumei Riemann şi de inegalităţile evidente

$$m \leq m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \leq M, \; i = \overline{1, n}. \tag{5.2.2}$$

5.2.3 Teoremă. *Dacă diviziunii $\Delta := (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in$Div$[a, b]$ i se adaugă cel puţin un nou punct de diviziune atunci noua diviziune $\Delta' \in$Div$[a, b]$ este mai fină ca Δ şi avem*

$$s(f, \Delta) \leq s(f, \Delta'), \quad S(f, \Delta) \leq S(f, \Delta'). \tag{5.2.3}$$

Demonstraţie. Să presupunem că $\Delta' = \Delta \cup \{c\}$, $x_{i-1} < c < x_i$, adică,

$$\Delta' := (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, c, x_i, \ldots, x_n).$$

Atunci în suma $s(f,\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ numărul $m_i(x_i - x_{i-1})$ se înlocuieşte cu $m_i'(c - x_{i-1}) + m_i''(x_i - c)$, unde

$$m_i' := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, c]\}, m''_i := \inf\{f(x) \mid x \in [c, x_i]\}.$$

şi evident $m_i \le m_i'$, $m_i \le m_i''$. Deci

$$\begin{aligned} &m_i(x_i - x_{i-1}) = m_i(x_i - c + c - x_{i-1}) = \\ &m_i(x_i - c) + m_i(c - x_{i-1}) \le m_i'(c - x_{i-1}) + m_i''(x_i - c). \end{aligned}$$

Deducem că

$$s(f,\Delta) \le s(f,\Delta').$$

Analog se deduce cea de-a doua inegalitate din (5.2.2).

5.2.4 Teoremă *Oricare ar fi diviziunile* $\Delta', \Delta'' \in \mathrm{Div}\,[a,b]$ *avem*

$$s(f,\Delta') \le S(f,\Delta'') \tag{5.2.4}$$

Demonstraţie. Fie $\Delta', \Delta'' \in \mathrm{Div}\,[a,b]$ şi notăm $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$. Atunci este clar că $\Delta \supset \Delta'$ şi $\Delta \supset \Delta''$ şi după teorema 5.2.3 avem

$$s(f,\Delta') \le s(f,\Delta) \text{ şi } S(f,\Delta) \le S(f,\Delta'').$$

De aici, deoarece $s(f,\Delta) \le S(f,\Delta)$ conform (5.2.1) avem $s(f,\Delta') \le S(f,\Delta'')$, adică inegalitatea cerută.

5.2.5 Observaţie. Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este mărginită, atunci mulţimile $\{s(f,\Delta) \mid \Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b]\}$ şi $\{S(f,\Delta) \mid \Delta \in \mathrm{Div}\,[a,b]\}$ sunt mărginite.

Afirmaţia rezultă din inegalitatea (5.2.1).

5.2.6 Definiţie. Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este mărginită, notăm

$$\begin{aligned} &\underline{I}(f) := \sup\{s(f,\Delta) \mid \Delta \in Div[a,b]\}, \\ &\overline{I}(f) := \inf\{S(f,\Delta) \mid \Delta \in Div[a,b]\}. \end{aligned}$$

Numerele reale $\underline{I}(f)$, $\overline{I}(f)$ se numesc **integralele lui Darboux** inferioară, respectiv superioară. Din această definiţie rezultă că

$$s(f,\Delta) \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le S(f,\Delta). \tag{5.2.5}$$

Mai mult, are loc

5.2.7 Teoremă. *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mărginită şi* $\Delta \in \mathrm{Div}[a,b]$ *o diviziune fixată a intervalului* $[a,b]$. *Atunci*

$$s(f,\Delta) = \inf\{\sigma(f,\Delta,\xi) \mid \xi \in P(\Delta)\}, \tag{5.2.6}$$

$$S(f,\Delta) = \sup\{\sigma(f,\Delta,\xi) \mid \xi \in P(\Delta)\}. \tag{5.2.7}$$

Demonstraţie. Fie $\Delta = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in P(\Delta)$. Din (5.2.1) deducem că $s(f,\Delta) \le \sigma(f,\Delta,\xi)$, pentru orice $\xi \in P(\Delta)$.

Să arătăm că $s(f,\Delta)$ este cel mai mare minorant al mulţimii $\{\sigma(f,\Delta,\xi) \mid \xi \in P(\Delta)\}$. Fie $\varepsilon > 0$. Dacă $m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i = \overline{1,n}$, putem spune că pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ există $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, deci există $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n)$ astfel ca $f(\xi_i) < m_i + \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, căci m_i este margine inferioară. Atunci pentru acest $\xi \in P(\Delta)$ avem

$$\sigma(f,\Delta,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \left(m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = s\,(f, \Delta) + \varepsilon.$$

Aceasta arată că are loc (5.2.6). În mod analog se demonstrează şi (5.2.7).

5.2.8 Teoremă. (Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann). *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mărginită. Funcţia f este integrabilă Riemann pe* $[a, b]$ *atunci şi numai atunci când pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un* $\delta > 0$ *aşa încât oricare ar fi* $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ *cu* $\nu\,(\Delta) < \delta$*, să avem*

$$S\,(f, \Delta) - s\,(f, \Delta) < \varepsilon. \tag{5.2.8}$$

Demonstraţie. *Necesitatea*: Presupunem că funcţia f este integrabilă şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ cu $\nu(\Delta) < \delta$ şi pentru orice $\xi', \xi'' \in P(\Delta)$ avem (conform teoremei 5.1.19)

$$|\,\sigma\;(f, \Delta, \xi') - \sigma\;(f, \Delta, \xi'')\,| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.2.9}$$

Din teorema precedentă, cum $s(f,\ \Delta)$ şi $S(f,\ \Delta)$ sunt marginile inferioară, respectiv superioară ale mulţimii $\{\sigma\,(f, \Delta, \xi\;)\;|\;\xi \in P(\Delta)\,\}$ putem spune că există două şiruri de sisteme de puncte intermediare (ξ^n) şi $(\bar{\xi}^n)$ astfel încât

$$s\,(f, \Delta) = \lim_{n\to\infty} \sigma\;(f, \Delta, \xi^n)\,,\; S\,(f, \Delta) = \lim_{n\to\infty} \sigma\;(f, \Delta, \bar{\xi}^n).$$

În plus, cum $\nu(\Delta) < \delta$, cu (5.2.9) deducem că

$$\left|\sigma(f, \Delta, \bar{\xi}^n) - \sigma(f, \Delta, \xi^n)\,\right| < \frac{\varepsilon}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

De aici, pentru $n \to \infty$ obţinem (5.2.8).

Suficienţa. Dacă $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ să presupunem că are loc (5.2.8) pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $\nu(\Delta) < \delta$. Din (5.2.5), avem

$$0 \le \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \le S\,(f, \Delta) - s\,(f, \Delta) < \varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$. Aceasta implică egalitatea

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) = 0.$$

Fie $I = \overline{I}(f) = \underline{I}(f)$, valoarea comună. Atunci avem, cu (5.2.5)

$$s\,(f, \Delta) \le I \le S\,(f, \Delta), \tag{5.2.10}$$

pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]$. Însă din (5.2.1) mai avem

$$s\,(f, \Delta) \le \sigma\;(f, \Delta, \xi\,) \le S\,(f, \Delta), \tag{5.2.11}$$

pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ şi $\xi \in P(\Delta)$ Cu inegalităţile (5.2.10) şi (5.2.11) putem scrie $|\sigma\;(f, \Delta, \xi\,) - I\,| \le S\,(f, \Delta) - s\,(f, \Delta) < \varepsilon$, pentru orice $\Delta \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ cu $\nu(\Delta) < \delta$ şi orice $\xi \in P(\Delta)$. Aceasta dovedeşte că f este integrabilă Riemann pe $[a,\ b]$ şi

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = I = \overline{I}(f) = \underline{I}(f).$$

5.2.9 Corolar. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită şi dacă f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ avem

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = \int_a^b f(x)\,d\,x. \tag{5.2.12}$$

Concluzia rezultă pe baza unicităţii integralei $I = \int_a^b f(x)\,d\,x$, pentru o funcţie integrabilă.

5.2.10 Observaţie. Dacă notăm $\omega_i = M_i - m_i$, $i = \overline{1, n}$, **oscilaţia funcţiei** $\boldsymbol{f}$ pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ atunci

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1})$$

şi criteriul lui Darboux se enunţă astfel:

Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *mărginită, este integrabilă pe* $[a, b]$ *dacă şi numai dacă* $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $\delta(\varepsilon) > 0$, *astfel încât pentru* $(\forall)$ $\Delta \in \mathrm{Div}[a, b]$ *cu* $\nu(\Delta) < \delta$, *avem*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon. \tag{5.2.13}$$

5.2.11 Observaţie. Din teorema 5.2.8. rezultă că $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) a intervalului $[a, b]$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(\Delta_n) = 0$ şi orice şir (ξ^n) de sisteme de puncte intermediare avem

$$\lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} s(f, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, \Delta_n, \xi^n) = I.$$

5.2.12 Observaţie. (**Interpretarea geometrică a integralei Riemann).** Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă (deşi nu este obligatoriu) şi pozitivă, şi fie graficul său

$$G_f := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x),\ x \in [a, b] \}.$$

Graficul G_f este arcul de curbă AB situat deasupra axei Ox. Mulţimea de puncte T cuprinsă între axa Ox, graficul G_f şi dreptele $x = a$, $x = b$ se numeşte **trapez curbiliniu**. Se pune problema evaluării **ariei** trapezului curbiliniu T, deocamdată acceptând pentru arie definiţia dată la liceu.

Fig 5.2.1.

Deoarece funcţia f este mărginită pe $[a, b]$, fiind continuă, trapezul curbiliniu $T = ABba$, este o mulţime de puncte din plan, mărginită. Fie $\Delta = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ şi în punctele diviziunii vom ridica perpendiculare pe Ox. Dacă pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, notăm

$$m_i := \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \},\ M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \},$$

vom considera dreptunghiurile având ca baze pe $x_i - x_{i-1}$ şi ca înălţimi, odată pe m_i şi apoi pe M_i. Ariile acestor dreptunghiuri vor fi, pentru dreptunghiurile mici incluse în trapezul curbiliniu,

$$m_1(x_1 - x_0),\ m_2(x_2 - x_1),\ \ldots,\ m_n(x_n - x_{n-1}),$$

iar pentru dreptunghiurile mai mari, care au şi părţi exterioare trapezului curbiliniu,

$$M_1(x_1 - x_0),\ M_2(x_2 - x_1),\ \ldots,\ M_n(x_n - x_{n-1}).$$

Reuniunea tuturor dreptunghiurilor cu înălţimile m_i, $i = \overline{1, n}$ este un poligon P conţinut în trapezul curbiliniu, având aria

$$\mathrm{Aria}\, P = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = s(f, \Delta), \tag{5.2.14}$$

iar reuniunea tuturor dreptunghiurilor cu înălţimile M_i, $i = \overline{1, n}$ este un poligon Q care conţine în întregime trapezul curbiliniu şi care are aria

$$\mathrm{Aria}\, Q = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = S(f, \Delta). \tag{5.2.15}$$

Evident, aceste arii sunt chiar sumele Darboux $s(f, \Delta)$, respectiv $S(f, \Delta)$. Aşadar, ariile poligoanelor P şi Q aproximează, prin lipsă şi respectiv prin adaos, aria trapezului curbiliniu. Aproximarea este din ce în ce mai bună când n creşte şi lungimile intervalelor $[x_i - x_{i-1}]$ scad, adică $\nu(\Delta) \to 0$ când $n \to \infty$.

Considerând acum un şir de diviziuni (Δ_n) ale intervalului $[a, b]$, vom obţine două şiruri de poligoane (P_n), incluse în trapezul curbiliniu şi (Q_n), care conţin trapezul curbiliniu, ariile lor fiind

$$\text{Aria}\, P_n = s(f, \Delta_n)\,;\ \text{Aria}\, Q_n = S(f, \Delta_n). \tag{5.2.16}$$

Dacă f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ atunci conform criteriului lui Darboux şi observaţiei 5.1.11 se deduce că dacă pentru şirul de diviziuni (Δ_n), avem $\nu(\Delta_n) \to 0$ când $n \to \infty$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} (S(f, \Delta_n) - s(f, \Delta_n)) = 0\,,\ \lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} s(f, \Delta_n) = I$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} \text{Aria}\, P_n = \lim_{n\to\infty} \text{Aria}\ Q_n = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{5.2.17}$$

Aşadar, în acest caz, deoarece

$$\text{Aria}\ P_n \le \text{Aria}\ T \le \text{Aria}\ Q_n,$$

se deduce că trapezul curbiliniu T are arie (se spune că este o mulţime măsurabilă) şi aria sa este

$$\text{Aria}\ T = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{5.2.18}$$

Să observăm că putem aproxima Aria T şi cu o sumă Riemann

$$\sigma(f, \Delta_n, \xi^n) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi^n)(x_i - x_{i-1}),$$

unde $\xi^n = \{\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_n^n\} \in P(\Delta_n)$, adică cu suma ariilor dreptunghiurilor cu bazele $x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$ şi înălţimile $f(\xi_i^n)$, datorită lui (5.2.1).

Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nu este neapărat pozitivă, atunci

$$\text{Aria}\ T = \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{5.2.19}$$

Vom prezenta în cele ce urmează câteva clase de funcţii integrabile Riemann.

5.2.13 Teoremă. *Orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă, este integrabilă Riemann.*

Demonstraţie. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci ea este uniform continuă (teorema lui Cantor) şi deci oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ aşa încât pentru orice $x', x'' \in [a, b]$ cu $\left| x' - x'' \right| < \delta$, avem

$$|\, f(x') - f(x'')\, | < \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{5.2.20}$$

Dacă luăm o diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \text{Div}\,[a, b]$ cu $\nu(\Delta) < \delta$, se deduce că f este continuă pe fiecare interval parţial $[x_{i-1}, x_i]$ şi pe baza teoremei lui Weierstrass, ea este mărginită şi îşi atinge marginile pe fiecare $[x_{i-1}, x_i]$. Atunci există punctele $\xi_i', \xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$ aşa încât

$$m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(\xi_i')\,,$$
$$M_i := \sup\{f(x) \,\Big|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f({\xi'}'_i)\ .$$

Cu (5.2.20) vom avea

$$M_i - m_i = f({\xi'}'_i) - f(\xi_i') < \frac{\varepsilon}{b - a}\,,\ \ i = \overline{1, n}.$$

De aici rezultă

$$S\,(f,\Delta)-s\,(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon,$$

şi pe baza criteriului lui Darboux, se deduce că funcţia f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

5.2.14 Teoremă. *Orice funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotonă, este integrabilă Riemann.*

Demonstraţie. Fie deci f o funcţie monotonă, de exemplu crescătoare pe $[a,b]$. Dacă $\Delta=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{Div}\,[a,b]$ atunci f este crescătoare şi pe $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$ şi deci $m_i=f(x_{i-1})$ şi $M_i=f(x_i)$. Atunci

$$S\,(f,\Delta)-s\,(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right](x_i-x_{i-1}).$$

Însă $x_i-x_{i-1}\leq\nu\ (\Delta)$ pentru orice $i=\overline{1,\,n}$ şi atunci

$$S(f,\Delta)-s(f,\Delta)\leq\nu(\Delta)\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=\nu(\Delta)[f(b)-f(a)].$$

Fie acum $\varepsilon>0$ şi $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Dacă $\nu\,(\Delta)<\delta(\varepsilon\,)$ atunci obţinem

$$S\,(f,\Delta)-s\,(f,\Delta)<\delta\cdot[f(b)-f(a)]=\varepsilon,$$

pentru orice diviziune Δ cu $\nu(\Delta)<\delta$. Pe baza criterului lui Darboux se deduce că f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

5.2.15 Observaţie. În clasa funcţiilor monotone, deci integrabile pe$[a,b]$ intră şi unele funcţii discontinue. Dacă notăm $D(f)$ mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, este importantă structura mulţimii $D(f)$ în studiul integrabilităţii funcţiei f.

5.2.16 Teoremă. *O funcţie $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ mărginită şi având un număr finit de puncte de discontinuitate, este integrabilă Riemann.*

Demonstraţie. Este suficient să presupunem că f are un singur punct de discontinuitate $c\in]a,b[$, căci în caz contrar vom descompune $[a,b]$ într-un număr finit de intervale, fiecare având câte un punct de discontinuitate.

Fie $\varepsilon>0$ aşa ca $]\ c-\varepsilon,c+\varepsilon\,[\subset[a,b]$ şi atunci putem scrie

$$[a,b]=[a,c-\varepsilon\,]\cup]\,c-\varepsilon,c+\varepsilon\ [\cup\,[c+\varepsilon,b].$$

Pe intervalele $[a,c-\varepsilon\,]$ şi $[c+\varepsilon,b]$, funcţia f este continuă şi deci uniform continuă Astfel că pentru $\varepsilon>0$, există numerele $\delta_1(\varepsilon)>0,\ \delta_2(\varepsilon\,)>0$ aşa încât pentru orice

$$x',x''\in[a,c-\varepsilon\,]\ \text{cu}\ \ |\,x'-x''\,|<\delta_1,\text{avem}\ |\,f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

La fel dacă

$$x',x''\in[c+\varepsilon,b\,]\,\text{cu}\ \ |\,x'-x''\,|<\delta_2,\ \text{avem}\ |\,f(x')-f(x'')\,|<\varepsilon.$$

De aici, dacă $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, rezultă că pentru orice

$$x',x''\in[a,c-\varepsilon\,]\ \cup\ \ [c+\varepsilon,b]\ \text{cu}\ |\,x'-x''\,|<\delta,$$

avem

$$|\,f(x')-f(x'')\,|<\varepsilon. \tag{5.2.20'}$$

Fie $\Delta:=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{Div}[a,b]$ cu $\nu(\Delta)<\delta$. Este clar că o parte a punctelor de diviziune, să zicem $x_k,x_{k+1},\ldots,x_j\in[c-\varepsilon,\ c+\varepsilon\,]$. Atunci vom avea

$$S(f,\Delta)-s(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{k-1}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})+$$

$$+\sum_{i=k}^{j}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=j+1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}). \tag{5.2.21}$$

În prima şi în a treia sumă, utilizăm (5.2.20'), iar în a doua sumă putem scrie

$$M_i-m_i\le M-m \ \text{ şi } \ \sum_{i=k}^{j}(x_i-x_{i-1})<2\varepsilon,$$

unde

$$M:=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\},$$
$$m:=\inf\{f(x)\mid x\in[a,b]\}.$$

Atunci (5.2.21) ne dă

$$\begin{aligned}S(f,\Delta)-s(f,\Delta) &= \varepsilon\sum_{i=1}^{k-1}(x_i-x_{i-1})+(M-m)\sum_{i=k}^{j}(x_i-x_{i-1})++\varepsilon\sum_{i=j+1}^{n}(x_i-x_{i-1})\\ &< \varepsilon\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})+(M-m)\cdot 2\varepsilon=\\ &= \varepsilon(b-a)+2\varepsilon(M-m)=\varepsilon[b-a+2(M-m)].\end{aligned}$$

Cum $\varepsilon>0$ este arbitrar, cu criteriul lui Darboux rezultă că funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$.

5.2.17 Teoremă. *Fie $f,\, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile*

1^0. *f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$;*

2^0. *$g(x)=f(x)$ pentru orice $x\in[a,b]\backslash A$, unde $A\subset[a,b]$ este finită.*

Atunci funcţia g este integrabilă pe $[a,b]$ şi avem

$$\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.2.22}$$

Demonstraţie. Vom presupune, pentru simplificare, că mulţimea A are un singur punct c, deci $A=\{c\}$. Evident f este mărginită, $|f(x)|\le M',\ M'>0$ şi notând $M=\max\{M',|g(c)|\}$, atunci este clar că vom avea

$$|f(x)|\le M\,,|g(x)|\le M\,,\ x\in[a,b]. \tag{5.2.23}$$

Faptul că f este integrabilă, înseamnă că pentru orice $\varepsilon>0$, există un $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât pentru orice $\Delta\in\mathrm{Div}[a,b]$ cu $\nu(\Delta)<\delta$ şi orice $\xi\in P(\Delta)$ să avem

$$\left|\sigma\,(f,\Delta,\xi)-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.2.24}$$

Alegem o diviziune $\Delta:=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ cu $\nu(\Delta)<\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{8M},\delta\right\}$ şi un sistem de puncte intermediare $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}\in P(\Delta)$.

Dacă punctul c este un punct al diviziunii Δ, fie $c=x_j$, atunci este posibil ca $c=\xi_j$ sau $c=\xi_{j+1}$. Vom putea scrie atunci, cu ipoteza 2^0

$$|\sigma\,(f,\Delta,\xi)-\sigma\,(g,\Delta,\xi)|=\left|\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)-g(\xi_i)](x_i-x_{i-1})\right|=$$
$$=|[f(\xi_j)-g(\xi_j)]\,(x_j-x_{j-1})+[f(\xi_{j+1})-g(\xi_{j+1})]\,(x_{j+1}-x_j)|\le$$
$$\le|f(\xi_j)-g(\xi_j)|\,(x_j-x_{j-1})+|f(x_{j+1})-g(\xi_{j+1})|\,(x_{j+1}-x_j)\le$$

$$\leq (\,|\,f(\xi_j)\,|+|\,g(\xi_j)|)\,\nu(\Delta)+(f\,|(\xi_{j+1})\,|+|g\,(\xi_{j+1})|)\,\nu(\Delta)\leq$$
$$\leq 4\,M\,\nu\,(\Delta)<4\,M\cdot\frac{\varepsilon}{8\,M}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă punctul c nu este punct de diviziune în Δ, fie atunci $x_{j-1}<c<x_j$ şi în acest caz c ar putea coincide cu ξ_j. Cu ipoteza 2^0, putem scrie

$$|\,\sigma(f,\Delta,\xi)-\sigma(g,\Delta,\xi)\,|=|\,f(\xi_j)-g(\xi_j)\,|\,(x_j-x_{j-1})\leq$$
$$\leq (f|(\xi_j)\,|+|g(\xi_j)\,|\,)\;\nu(\Delta)\leq 2M\,\nu(\Delta)<\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Aşadar, oriunde s-ar afla punctul c în $[a,b]$, putem scrie

$$|\,\sigma(f,\Delta,\xi)-\sigma(g,\Delta,\xi)\,|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.2.25}$$

Folosind acum (5.2.24) şi (5.2.25) avem

$$\left|\sigma(g,\Delta,\xi)-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\sigma(g,\Delta,\xi)-\sigma(f,\Delta,\xi)+\sigma(f,\Delta,\xi)-\int_a^b f(x)dx\right|\leq$$
$$\leq|\sigma(g,\Delta,\xi)-\sigma\,(f,\Delta,\xi\,)\,|+\left|\sigma\,(f,\Delta,\xi\,)-\int_a^b f(x)\,d\,x\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

ceea ce arată că g este integrabilă pe $[a,b]$ şi are loc (5.2.22).

5.2.18 Exemplu. Funcţia $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, dată prin

$$g(x)=\begin{cases} 2\,, & \text{dacă } x\in[1,2[\;,\\ 5\,, & \text{dacă } x=2\,,\end{cases}$$

este integrabilă Riemann pe $[1,2]$ şi

$$\int_1^2 g(x)\,d\,x=2.$$

Într-adevăr, funcţia $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2$ oricare ar fi $x\in[1,2]$, conform exemplului 5.1.13,1^0 este integrabilă şi

$$\int_1^2 f(x)\,d\,x=2\,(2-1)=2.$$

Pe de altă parte, avem $f(x)=g(x)$, pentru orice $x\in[1,2]\backslash\{2\}$. Aplicând teorema precedentă, deducem că g este integrabilă pe $[1,2]$ şi avem

$$\int_1^2 g(x)\,d\,x=\int_1^2 f(x)\,d\,x=2.$$

5.2.19 Observaţie. Teorema 5.2.17 ne permite să modificăm valorile unei funcţii $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile, într-un număr finit de puncte din $[a,b]$, şi funcţia obţinută să rămână tot integrabilă şi să aibă aceeaşi integrală ca şi f.

Pentru a demonstra un nou criteriu de integrabilitate Riemann, **criteriul lui Lebesgue**, care foloseşte doar structura mulţimii punctelor de continuitate (sau discontinuitate) ale funcţiei, avem nevoie de noţiunile de mulţime de măsură Jordan nulă şi de mulţime de măsură Lebesgue nulă.

5.2.20 Definiţie. (Mulţime de măsură Lebesgue nulă). Spunem că mulţimea $A\subset\mathbb{R}$ este **de măsură Lebesgue nulă** (sau este neglijabilă) dacă pentru orice $\varepsilon>0$, există o familie finită sau

numărabilă de intervale deschise $I_n =]\, a_n, b_n\, [$, care acoperă mulţimea A şi suma lungimilor lor este mai mică decât ε, adică

$$A \subset \bigcup_{n\in I_0}^{\infty}]\, a_n, b_n\, [; \quad \sum_{n\in I_0} (b_n - a_n) < \varepsilon,$$

unde $I_0 \subset \mathbb{N}$, este o submulţime finită sau numărabilă a lui $\mathbb{N}$.

5.2.21 Exemplu. a) Orice mulţime numărabilă din $\mathbb{R}$ este de măsură Lebesgue nulă. Într-adevăr, fie şirul $A = (x_n)$ de numere reale, deci o mulţime numărabilă şi să considerăm intervalele

$$I_n := \left]\, x_n - \frac{\varepsilon}{2\cdot 3^n}\,, x_n + \frac{\varepsilon}{2\cdot 3^n}\,\right[, \ \ \varepsilon > 0.$$

Este clar că

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left]\, x_n - \frac{\varepsilon}{2\cdot 3^n}\,, x_n + \frac{\varepsilon}{2\cdot 3^n}\,\right[$$

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

deci şirul $A = (x_n)$ este o mulţime de măsură Lebesgue nulă.

b) În particular, mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ este neglijabilă, de asemenea şi mulţimile $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{Z}$.

Cu acest exemplu se deduce imediat că şi o mulţime finită $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ este de măsură Lebesgue nulă.

Pentru mulţimile din $\mathbb{R}$ de măsură Lebesgue nulă avem:

5.2.22 Teoremă. 1^0. *Orice submulţime a unei mulţimi de măsură Lebesgue nulă, este de măsură Lebesgue nulă;*

2^0. *O reuniune cel mult numărabilă de mulţimi de măsură Lebesgue nulă este o mulţime de măsură Lebesgue nulă.*

Demonstraţie. Să demonstrăm doar propoziţia 2^0. Fie (A_n), $n \in N'$, o familie finită sau numărabilă de mulţimi de măsură Lebesgue nulă şi $\varepsilon > 0$. Atunci pentru orice $n \in N'$ (mulţime cel mult numărabilă de indici), există o familie cel mult numărabilă de intervale $I_{nk} =]\, a_k^n, b_k^n\, [\,,\ k \in N'' \subset \mathbb{N}$, astfel încât

$$A_n \subset \bigcup_{k\in N''}]\, a_k^n, b_k^n\, [\text{ şi } \sum_{k\in N''} (b_k^n - a_k^n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

De aici se deduce că

$$\bigcup_{n\in N'} A_n \subset \bigcup_{n\in N'} \left\{ \bigcup_{k\in N''}]\, a_k^n\,,\, b_k^n\, [\right\},$$

$$\sum_{n\in N'} \left(\sum_{k\in N''} (b_k^n - a_k^n) \right) < \sum_{n\in N'} \frac{\varepsilon}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

ceea ce arată că familia de mulţimi $(A_n)_{n\in N'}$ este de măsură nulă.

5.2.23 Definiţie. (Mulţime de măsură Jordan nulă). O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se spune că este **de măsură Jordan nulă**, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există o familie finită de intervale $I_k =]\, a_k, b_k\, [\,,\ k = \overline{1, n}$ cu proprietăţile

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n}]\, a_k,\, b_k\, [\text{ şi} \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \varepsilon.$$

5.2.24 Exemplu. O mulţime finită $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ este de măsură Jordan nulă.

Într-adevăr pentru $\varepsilon > 0$ să luăm intervalele:

$$I_k := \left]\, a_k - \frac{\varepsilon}{4n}, a_k + \frac{\varepsilon}{4n}\,\right[\ \ , \quad k = \overline{1, n}.$$

Vom avea

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left]\, \alpha_k - \frac{\varepsilon}{4n}, \alpha_k + \frac{\varepsilon}{4n} \,\right]$$

şi

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k + \frac{\varepsilon}{4n} - \alpha_k + \frac{\varepsilon}{4n} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

adică A este de măsură Jordan nulă.

5.2.25 Observaţie. Este evident că orice mulţime de măsură Jordan nulă este de măsură Lebesgue nulă, dar reciproca nu este în general adevărată.

5.2.26 Observaţie. Se spune despre proprietatea P referitoare la punctele unei mulţimi $A \subset \mathbb{R}$ că are loc **aproape peste tot** (a.p.t) pe mulţimea A, dacă mulţimea punctelor din A în care proprietatea P nu are loc este de măsură Lebesgue nulă.

De exemplu, spunem că funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă aproape peste tot pe $[a, b]$, dacă mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f are măsura Lebesgue nulă (este neglijabilă).

5.2.27 Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = [x]$ (partea întreagă a lui x) pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este continuă a.p.t. pe $\mathbb{R}$ deoarece mulţimea punctelor sale de discontinuitate este egală cu $\mathbb{Z}$ şi deci o mulţime de măsură Lebesgue nulă (exemplul 5.2.21.b).

5.2.28 Exemplu. Funcţia Dirichlet $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & \text{dacă} \quad x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nu este continuă a.p.t. pe $[0, 1]$ deoarece mulţimea punctelor sale de discontinuitate este întreg intervalul $[0, 1]$, care nu este de măsură Lebesgue nulă.

5.2.30 Definiţie. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită pe $[a, b]$ şi $D \subset [a, b]$. Numărul

$$\omega_f(D) := \sup f(D) - \inf f(D), \tag{5.2.26}$$

se numeşte **oscilaţia funcţiei *f* pe mulţimea *D***, iar dacă $x \in [a, b]$ numărul

$$\omega_f(x) := \inf \{\omega_f([a, b] \cap]\, x - r, x + r\, [) \; ; \; r > 0\}, \tag{5.2.27}$$

se numeşte **oscilaţia funcţiei *f* în punctul *x***.

5.2.31 Teoremă. *Funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *mărginită este continuă în punctul* $x_0 \in [a, b]$ *dacă şi numai dacă* $\omega_f(x_0) = 0$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Funcţia f este continuă în x_0 implică faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in [a, b] \cap]\, x_0 - \delta, x_0 + \delta\, [$ să avem

$$|\, f(x) - f(x_0)\, | < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.2.28}$$

De aici, dacă $u, v \in [a, b] \cap]\, x_0 - \delta,\, x_0 + \delta\, [$ deducem

$$|\, f(u) - f(v)\, | \leq |\, f(u) - f(x_0)\, | + |\, f(x_0) - f(v)\, | < \frac{2\varepsilon}{3},$$

şi atunci

$$\omega_f([a, b] \cap]\, x_0 - \delta,\, x_0 + \delta\, [) = \sup\{f(u) - f(v) \,\Big|\, u, v \in [a, b] \cap]\, x_0 - \delta, x_0 + \delta\, [\} \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Rezultă acum

$$0 \leq \omega_f(x_0) = \inf\{\omega_f([a, b] \cap]\, x_0 - \delta, x_0 + \delta\, [) \mid \delta > 0\} \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, ceea ce înseamnă că $\omega_f(x_0) = 0$.

Suficienţa. Presupunem că

$$\omega_f(x_0) = \inf\{\omega_f(\,[a,b]\cap\,]\,x_0-\delta,\; x_0+\delta\,[\,)\mid \delta>0\} = 0\ .$$

Dacă $\varepsilon > 0$, atunci există $r > 0$ astfel încât

$$\omega_f([a,b]\cap]\ x_0 - r, x_0 + r\ \ [\ ) < \varepsilon.$$

Având

$$|\,f(u) - f(v)\,| \le \omega_f([a,b]\cap]\ x_0 - r, x_0 + r\ \ [\ )$$

oricare ar fi $u,v \in [a,b]\cap]\ x_0 - r, x_0 + r\ \ [$, deducem că pentru $x \in [a,b]\cap]\ x_0 - r, x_0 + r\ \ [$ avem

$$|\,f(x) - f(x_0)\,| < \varepsilon.$$

Aceasta arată continuitatea funcţiei f în punctul x_0.

5.2.32 Observaţie. Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este discontinuă în punctul x_0, atunci $\omega_f(x_0) > 0$. De exemplu, pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0\ ,\ \ \textit{dacă}\ x \in \mathbb{Q}\,, \\ 1\ ,\ \ \textit{dacă}\ \ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

avem $\omega_f(x_0) = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Se deduce că f este discontinuă în orice $x \in \mathbb{R}$.

5.2.33 Teoremă. *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este mărginită, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, mulţimea $D = \{x \in [a,b]\mid \omega_f(x) \ge \varepsilon\ \}$ este compactă.*

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că D este închisă, deci că îşi conţine toate punctele sale de acumulare. Să presupunem contrarul, că există $x_0 \in [a,b]$, punct de acumulare al lui D dar $x_0 \notin D$. Atunci există $r > 0$ astfel încât

$$\omega_f(D\cap]\ x_0 - r, x_0 + r\ [) < \varepsilon.$$

Însă x_0 fiind punct de acumulare al lui D şi $]\ x_0 - r, x_0 + r\ [$ o vecinătate a sa, înseamnă că există cel puţin un $x \in D\cap]x_0 - r, x_0 + r\ [$ şi deci $\omega_f(x) \ge \varepsilon$. Însă

$$\omega_f(D\cap]\ x_0 - r, x_0 + r\ [) \ge \omega_f(x) \ge \varepsilon.$$

Am ajuns la o contradicţie. Deducem că $x_0 \in D$, deci D este închisă, ceea ce implică D compactă.

5.2.34 Teoremă. *Dacă funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, mulţimea*

$$D := \{\,x \in [a,b]\mid \omega_f(x) \ge \varepsilon\}\ ,$$

este de măsură Jordan nulă.

Demonstraţie. Fie $\delta > 0$ şi $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in$Div$[a,b]$. Cum f este integrabilă, cu criteriul lui Darboux se deduce că

$$S\,(f,\Delta) - s\,(f,\Delta) < \delta\ \varepsilon. \tag{5.2.29}$$

Evident, o parte dintre intervalele parţiale $[x_{i-1}, x_i]$ au puncte comune cu D. Atunci, să notăm cu $N' \subset \{1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n\}$ mulţimea acelor indici $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ pentru care $[x_{i-1}, x_i] \cap D \ne \emptyset$. Înseamnă că

$$[a,b] \supset \bigcup_{i\in N'} [x_{i-1}, x_i] \supset D \tag{5.2.30}$$

şi pentru orice $i \in N'$ şi orice $x \in [x_{i-1}, x_i] \cap D$, avem

$$\varepsilon \le \omega_f(x) \le \omega_f([x_{i-1}, x_i]) = M_i - m_i.$$

De aici, deducem $\varepsilon\ (x_i - x_{i-1}) \le (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})\ ,\ \ i \in N'$, inegalităţi pe care le însumăm, şi găsim

$$\varepsilon \sum_{i\in N'} (x_i - x_{i-1})\ \le \sum_{i\in N'} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S\,(f, \Delta) - s\,(f, \Delta) < \delta\, \varepsilon.$$

Simplificând cu ε, rezultă că $\sum\limits_{i \in N'} (x_i - x_{i-1}) < \delta$.

Am demonstrat astfel că intervalele $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in N'$ acoperă mulţimea D şi suma lungimilor lor este mai mică decât $\delta > 0$, deci D este o mulţime de măsură Jordan nulă.

5.2.35 Teoremă. (Criteriul lui Paul de Bois Reymond de integrabilitate Riemann). *Funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann pe* $[a, b]$ *dacă şi numai dacă* f *este mărginită şi pentru orice* $\varepsilon > 0$ *mulţimea*

$$D_\varepsilon := \{\, x \in [a, b] \mid \omega_f(x) \geq \varepsilon \}\ ,$$

este de măsură Jordan nulă.

Demonstraţie. Necesitatea rezultă din teoremele 5.1.14 şi 5.2.34, iar la demonstrarea suficienţei renunţăm, datorită întinderii ei.

5.2.36 Teoremă. (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann). *Funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann pe* $[a, b]$ *dacă şi numai dacă* f *este mărginită pe* $[a, b]$ *şi continuă aproape peste tot pe* $[a, b]$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Presupunem că f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Atunci ea este mărginită, pe baza teoremei 5.1.14. Pe baza teoremei 5.2.35, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, mulţimea

$$D_n := \left\{ x \in [a, b] \,\middle|\, \omega_f(x) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

este de măsură Jordan nulă şi deci şi de măsură Lebesgue nulă. Pe baza teoremei 5.2.22, deducem că şi mulţimea

$$D(f) := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

este de măsură Lebesgue nulă. Însă $D(f) = \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\}$ este chiar mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f şi deci mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f este de măsură Lebesgue nulă, ceea ce este echivalent cu faptul că f este continuă aproape peste tot pe $[a, b]$.

Suficienţa. Să presupunem acum că f este mărginită şi că ea este continuă aproape peste tot pe $[a, b]$. Fie $\varepsilon > 0$ şi să considerăm mulţimea

$$D_\varepsilon = \{x \in [a, b] \mid \omega_f\ (x)\ \geq \varepsilon\}.$$

Trebuie să arătăm că D_ε este de măsură Jordan nulă. Fie pentru aceasta un alt număr $\varepsilon' > 0$. Din faptul că f este continuă a.p.t pe $[a, b]$, rezultă că mulţimea punctelor sale de discontinuitate

$$D(f) = \{x \in [a, b] \mid \omega_f(x) > 0\}\ ,$$

este de măsură Lebesgue nulă. Deci există o familie cel mult numărabilă de intervale dechise $(\,]\,a_n, b_n\,[\,)$, $n \in N'$ astfel încât

$$D(f)\ \subset \bigcup_{n \in N'} \,]\,a_n, b_n\,[\text{ şi} \sum_{n \in N'} (b_n - a_n) < \varepsilon'.$$

Însă $D_\varepsilon \subset D(f)$, adică familia de intervale $(\,]\,a_n, b_n\,[\,)$, $n \in N'$ acoperă şi pe D_ε, şi cum D_ε este compactă (teorema 5.2.33) rezultă că există o subacoperire finită $(]\,a_i, b_i\,[)$, $i \in I_0$, $I_0 \subset \mathbb{N}$, I_0 finită, astfel încât

$$D_\varepsilon\ \subset \bigcup_{i \in I_0} \,]\,a_i, b_i\,[\text{ şi} \sum_{i \in I_0} (b_i - a_i) \leq \sum_{n \in N'} (b_n - a_n) < \varepsilon'.$$

Rezultă astfel că mulţimea D_ε are măsura Jordan nulă şi cu teorema 5.2.35 se deduce că f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

5.3 Operaţii cu funcţii integrabile Riemann. Proprietăţile funcţiilor integrabile şi ale integralei Riemann

5.3.1 Teoremă. (Linearitatea integralei Riemann). *Dacă funcţiile* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sunt integrabile Riemann atunci funcţia* $\alpha f + \beta g$ este *integrabilă Riemann pentru orice* α, $\beta\in \mathbb{R}$ *şi*

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5.3.1}$$

Demonstraţie. Utilizând definiţia integrabilităţii şi a integralei (definiţia 1.1.11), pentru $\varepsilon> 0$ va exista numărul $\delta'(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$\left|\sigma\,(f,\Delta,\xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{1+|\alpha|+|\beta|}, \tag{5.3.2}$$

pentru orice $\Delta \in$Div$[a,b]$ cu $\nu(\Delta) < \delta'$. Analog pentru funcţia g există $\delta''(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$\left|\sigma\,(g,\Delta,\xi) - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{1+|\alpha|+|\beta|}, \tag{5.3.3}$$

pentru $\Delta \in$Div$[a,b]$ cu $\nu(\Delta) < \delta''$ şi oricare ar fi $\xi \in P(\Delta)$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ.

Fie acum $\Delta \in$Div$[a,b]$ cu $\nu(\Delta) < \min\{\delta',\, \delta''\} = \delta$ şi $\xi \in P(\Delta)$. Atunci, utilizând (5.3.2) şi (5.3.3), obţinem

$$\left|\sigma\,(\alpha f+\beta g,\Delta,\xi) - \left(\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx\right)\right| =$$

$$= \left|\alpha\left(\sigma(f,\Delta,\xi)-\int_a^b f(x)\,dx\right)+\beta\left(\sigma(g,\Delta,\xi)-\int_a^b g(x)\,dx\right)\right| \le$$

$$\le |\alpha|\left|\sigma\,(f,\Delta,\xi)-\int_a^b f(x)\,dx\right| + |\beta|\left|\sigma(g,\Delta,\xi)-\int_a^b g(x)\,dx\right| \le$$

$$\le |\alpha|\frac{\varepsilon}{1+|\alpha|+|\beta|} + |\beta|\frac{\varepsilon}{1+|\alpha|+|\beta|} = \varepsilon\frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|} < \varepsilon.$$

De aici se deduce că $\alpha f + \beta g$ este integrabilă şi are loc (5.3.1).

Din această teoremă se deduce că $f+g$, $f-g$ şi cf sunt integrabile Riemann, dacă f, g sunt integrabile şi c este o constantă şi în plus

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm g(x)dx,\ \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

5.3.2 Teoremă. *Produsul a două funcţii integrabile Riemann este o funcţie integrabilă Riemann.*

Demonstraţie. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, două funcţii integrabile Riemann. Atunci ele sunt mărginite (teorema 5.1.14) şi produsul lor $f\cdot g$ va fi o funcţie mărginită. Fie

$$\begin{aligned} D(f) &:= \{\,x\in[a,b]\mid \omega_f(x)>0\}\ , \\ D(g) &:= \{\,x\in[a,b]\mid \omega_g(x)>0\}\ , \end{aligned}$$

mulţimile punctelor de discontinuitate ale celor două funcţii. Mulţimile $D(f)$ şi $D(g)$ sunt de măsură Lebesgue nulă pe baza criteriului lui Lebesgue. Mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei produs

$f \cdot g$ va fi $D(f\,g) \subset D(f) \cup D(g)$ şi atunci această mulţime $D(f\,g)$ are măsură Lebesgue nulă. Prin urmare, funcţia $f \cdot g$ este continuă aproape peste tot pe $[a,b]$ şi pe baza criteriului lui Lebesgue ea va fi integrabilă Riemann.

5.3.3 Observaţie. Cu toate că produsul $f \cdot g$ a două funcţii integrabile este o funcţie integrabilă, integrala produsului nu este egală cu produsul integralelor.

5.3.4 Teoremă. *Dacă funcţiile $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$, $g(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in [a,b]$ şi $\dfrac{1}{g}$ este mărginită pe $[a,b]$ atunci câtul $\dfrac{f}{g}$ este o funcţie integrabilă pe $[a,b]$.*

Demonstraţie. Cum $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$, înseamnă că funcţia $\dfrac{1}{g}$ este continuă în aceleaşi puncte ca şi g şi deci $\dfrac{1}{g}$ este continuă a.p.t pe $[a,b]$. Funcţia f de asemenea fiind integrabilă, este continuă a.p.t pe $[a,b]$. Atunci, cu teorema 5.3.2 se deduce că $f \cdot \dfrac{1}{g} = \dfrac{f}{g}$ este integrabilă Riemann.

5.3.5 Observaţie. Dacă $a = b$, deci $[a,b] = \{a\}$ şi $f : \{a\} \to \mathbb{R}$, atunci f este integrabilă pe $[a,a]$ şi avem

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Într-adevăr, în acest caz orice diviziune Δ a intervalului $[a,a]$ este $\Delta = \{a\}$ şi orice sistem de puncte intermediare asociat lui Δ este $\xi = \{a\}$ şi atunci $\sigma\,(f, \Delta, \xi\,) = f(a)(a-a) = 0$, deci $I = 0$. De asemenea dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$ atunci se consideră, prin convenţie, că este integrabilă şi pe $[b,a]$ şi avem

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{5.3.4}$$

5.3.6 Teoremă. *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ şi dacă $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$, atunci avem*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Demonstraţie. Fie $\Delta_n := (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n) \in$Div$[a,b]$, $n \in \mathbb{N}^*$, un şir de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(\Delta_n) = 0$ şi fie $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_{k_n}^n) \in P(\Delta_n)$ un şir de sisteme de puncte intermediare. Atunci şirul sumelor Riemann asociate este

$$\sigma(f, \Delta_n, \xi^n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{k_i}^n)(x_{k_i}^n - x_{k_{i-1}}^n) \geq 0,$$

şi atunci avem

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\,(f, \Delta_n, \xi^n) = \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

5.3.7 Teoremă. *Dacă funcţiile $f, g : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$ şi dacă $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$, atunci*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5.3.5}$$

Demonstraţie. Fie funcţia $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)\,,\, x \in [a,b]$. Prin ipoteză avem $h(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$ şi atunci aplicând teorema 5.3.6. şi teorema 5.3.1, obţinem

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0,$$

ceea ce este echivalent cu (5.3.5).

5.3.8 Corolar. Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile pe $[a,b]$, $g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$, atunci avem

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx, \tag{5.3.6}$$

unde $m := \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ şi $M := \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Demonstraţie. Avem, evident, pentru orice $x \in [a,b]$

$$m \leq f(x) \leq M$$

şi cum $g(x) \geq 0$, se obţine

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x).$$

Deoarece $f \cdot g$ este integrabilă, aplicând teorema 5.3.7 avem

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx.$$

5.3.9 Corolar. Dacă $f{:}[a,b]{\to}\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a), \tag{5.3.7}$$

unde m şi M sunt marginile funcţiei f pe $[a,b]$.

Demonstraţie. Demonstraţia rezultă imediat, dacă în corolarul 5.3.8 considerăm funcţia $g(x) = 1$, pentru orice $x \in [a,b]$.

5.3.10 Teoremă. *Dacă $f{:}[a,b]{\to}\ \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci funcţia $|\,f\,|$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi avem*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{5.3.8}$$

Demonstraţie. Cum f este integrabilă Riemann pe $[a,\ b]$, ea este mărginită pe $[a,\ b]$. Atunci, şi $|\,f\,|$ este mărginită. Dacă $D(f)$ este mulţimea punctelor de discontinuitate a lui f, atunci $D(f)$ este o mulţime neglijabilă. Atunci, mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui $|\,f\,|$ este $D\,(\,|\,f\,|\,) \subset D\,(f)$, deci ea are măsură Lebesgue nulă. Deducem că funcţia $|\,f\,|$ este integrabilă Riemann pe $[a,\ b]$. Evident, mai avem, pentru orice $x \in [a,\ b]$

$$-\,|\,f(x)\,| \leq f(x) \leq |\,f(x)\,|\,,$$

şi atunci cu (5.3.5) obţinem

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx,$$

adică

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)\,|\,dx. \tag{5.3.9}$$

5.3.11 Teoremă. (Prima formulă generalizată de medie). *Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$ şi dacă $g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$, atunci există un număr $\mu \in [m,M]$, unde m şi M sunt marginile funcţiei f, astfel încât*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5.3.10}$$

Demonstraţie. Dacă $m := \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ şi $M := \sup \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, atunci după (5.3.6) avem

$$m \int_a^b g(x)\, d\, x \leq \int_a^b f(x) \ \cdot g(x)\, d\, x \ \leq M \ \int_a^b g(x)\, d\, x. \tag{5.3.11}$$

Cum $g(x) \geq 0$ avem $\int_a^b g(x)\, d\, x \ \geq 0$. Dacă $\int_a^b g(x)\, d\, x \ > 0$, împărţim inegalităţile (5.3.11) cu $\int_a^b g(x)\, d\, x$ şi găsim

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\, x}{\int_a^b g(x)\, d\, x} \leq M.$$

Dacă notăm cu

$$\mu := \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx},$$

atunci $m \leq \mu \leq M$ şi

$$\int_a^b f(x) \ g(x)\, d\, x = \mu \int_a^b g(x)\, d\, x.$$

Dacă, însă $\int_a^b g(x)\, d\, x \ = 0$, atunci din (5.3.11) obţinem $\int_a^b f(x) \ g(x)\, d\, x \ = \ 0$. Atunci putem scrie pentru orice $\mu \ \in [m,\, M]$

$$\int_a^b f(x) \ g(x)\, d\, x = \mu \int_a^b g(x)\, d\, x.$$

5.3.12 Corolar. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, iar $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ şi $g(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, atunci există cel puţin un $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\, x = f(c) \int_a^b g(x)\, d\, x. \tag{5.3.12}$$

Demonstraţie. Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci f are proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$ şi deci pentru orice $m \leq \mu \leq M$ există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = \mu$. Acum din teorema 5.3.11 rezultă concluzia (5.3.12).

Pentru $g(x) \equiv 1$, din (5.3.10), se obţine **prima formulă de medie**

$$\int_a^b f(x)\, d\, x = \mu\, (b - a)\, , \ \ \mu \in [m\, ,\, M\,].$$

5.3.13 Corolar. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)\, d\, x = f(c)\, (b - a). \tag{5.3.15}$$

Formula (5.3.13) se numeşte **prima formulă de medie pentru funcţii continue**. Formula rezultă direct din (5.3.12) dacă se ia $g(x) = 1$ pentru orice $x \in [a, b]$.

Are loc şi teorema următoare:

5.3.14 Teoremă. (Teorema a doua de medie). *Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfac condiţiile:*

(i) f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$;

(ii) g este monotonă pe $[a, b]$, atunci are loc relaţia

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, d\,x = g(a) \int_a^c f(x)\, d\,x + g(b) \int_c^b f(x)\, d\,x\,,\ c \in [a, b]. \tag{5.3.14}$$

Renunţăm la demonstrarea teoremei, întrucât demonstraţia necesită anumite proprietăţi ale integralei cu limita superioară variabilă, care se vor studia în paragraful 5.4 al acestui capitol.

5.3.15 Teoremă. (Aditivitatea integralei ca funcţie de interval). *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ atunci pentru orice $c \in]\,a, b\,[$ funcţia f va fi integrabilă Riemann atât pe $[a, c]$ cât şi pe $[c, b]$ şi are loc relaţia*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, d\,x + \int_c^b f(x)\, d\,x. \tag{5.3.15}$$

Demonstraţie. Fie f integrabilă Riemann pe $[a, b]$ şi $c \in]a, b[$. Atunci f este mărginită şi continuă a.p.t. pe $[a, b]$. Înseamnă că oricare ar fi intervalul $[\alpha, \beta\,] \subset [a, b]$ funcţia f va fi mărginită pe intervalul $[\alpha,\ \beta]$ şi de asemenea continuă a.p.t. pe $[\alpha,\ \beta]$, deci integrabilă pe $[\alpha,\ \beta]$. Deducem că f este integrabilă Riemann pe $[a,\ c]$ şi pe $[c,\ b]$. Mai trebuie să demonstrăm egalitatea (5.3.15). Fie $\Delta' \in \mathrm{Div}\,[a, c]$ şi $\Delta'' \in \mathrm{Div}\,[c, b]$ diviziuni oarecare şi $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' \in \mathrm{Div}\,[a, b]$. Pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât dacă $\nu\,(\Delta'\,) < \delta$ şi $\nu\,(\Delta''\,) < \delta$ şi oricare ar fi $\xi' \in P(\Delta'\,)$ şi $\xi'' \in P(\Delta''\,)$ vom avea

$$\left| \sigma\ (f, \Delta', \xi'\,) - \int_a^c f(x)\, d\,x \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.3.16}$$

$$\left| \sigma\ (f, \Delta'', \xi''\,) - \int_c^b f(x)\, d\,x \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.3.17}$$

Este clar că $\nu\ (\Delta\,) \le \nu\,(\Delta'\,) < \delta$ şi atunci pentru $\xi = \xi' \cup \xi'' \in P\,(\Delta)$, avem

$$\sigma(f, \Delta, \xi) = \sigma\,(f, \Delta', \xi') + \sigma\ (f, \Delta'', \xi''\,).$$

Mai avem

$$\left| \sigma(f, \Delta, \xi) - \left(\int_a^c f(x)\, d\,x + \int_c^b f(x)\, dx \right) \right| = \left| \sigma(f, \Delta', \xi') - \int_a^c f(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \sigma\ (f, \Delta'', \xi''\,) - \int_c^b f(x)\, d\,x \right| \le \left| \sigma\ (f, \Delta', \xi'\,) - \int_a^c f(x)\, d\,x \right| +$$

$$+ \left| \sigma\ (f, \Delta'', \xi''\,) - \int_c^b f(x)\, d\,x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Aceasta arată că

$$\int_a^c f(x)\, d\,x + \int_c^b f(x)\, d\,x = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Se mai poate demonstra o variantă a teoremei precedente

5.3.16 Teoremă. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *şi* $c \in]a, b[$. *Dacă funcţia* f *este integrabilă Riemann pe* $[a, c]$ *şi pe* $[c, b]$, *atunci* f *este integrabilă Riemann pe* $[a, b]$ *şi are loc* (5.3.15).

Demonstraţie. Să presupunem că f este integrabilă Riemann atât pe $[a, c]$ cât şi pe $[c, b]$. Atunci f este mărginită atât pe $[a, c]$ cât şi pe $[c, b]$, deci f va fi mărginită şi pe $[a, b]$. De asemenea dacă A este mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f pe $[a, c]$ şi B este mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f pe $[c, b]$, atunci A şi B au măsură Lebesgue nulă şi mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f pe $[a, b]$ va fi $A \cup B$ şi va fi tot de măsură Lebesgue nulă (Teorema 5.2.22). Aşadar f va fi integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Egalitatea (5.3.15) se demonstrează ca şi la Teorema 5.3.15.

5.3.17 Definiţie. Fie f: $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde I este un interval (posibil chiar $\mathbb{R}$). Spunem că f este **local integrabilă Riemann** pe I dacă f este integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a, b] \subset I$, cu $a < b$.

5.3.18 Exemplu. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval (nedegenerat) şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci f este local integrabilă pe I. Într-adevăr, pentru orice $[a, b] \subset I$, f va fi continuă pe $[a, b]$, deci integrabilă Riemann pe $[a, b]$ şi astfel va fi local integrabilă pe I.

5.3.19 Teoremă. *Dacă* $I \subset \mathbb{R}$ *este un interval nedegenerat şi* f: $I \to \mathbb{R}$ *o funcţie local integrabilă pe I, atunci oricare va fi* $a, b, c \in I$ *avem*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.3.18}$$

Demonstraţie. Pentru demonstraţia relaţiei (5.3.18) deosebim mai multe cazuri:
a) $a = b = c$, atunci este clar că avem

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0\,, \quad \int_a^c f(x)\,dx = 0\,, \quad \int_c^b f(x)\,dx = 0\,,$$

şi evident, are loc (5.3.18).
b) $a = b \neq c$, caz în care

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0\,, \quad \int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx,$$

şi egalitatea rezultă imediat.

Analog se tratează cazurile $a \neq b = c$ şi $a = c \neq b$.
c) $a < c < b$, atunci pe baza Teoremei 5.3.15, are loc relaţia (5.3.18);
d) $a < b < c$, tot pe baza Teoremei 5.3.15, avem

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

iar de aici obţinem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Celelalte posibilităţi de ordonare $b < a < c$; $b < c < a$; $c < a < b$; $c < b < a$, se discută în mod analog.

Putem acum da o teoremă mai tare decât Teorema 5.3.6.

5.3.20 Teoremă. *Dacă funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ *este continuă, pozitivă şi neidentic nulă pe* $[a, b]$, *atunci avem*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0. \tag{5.3.19}$$

Demonstraţie. Dacă f este pozitivă şi neidentic nulă pe $[a\,,\,b]$ atunci există cel puţin un punct $x_0 \in [a\,,\,b]$ astfel încât $f(x_0) > 0$. Fiind continuă pe $[a\,,\,b]$, deci şi în x_0, există o vecinătate, $V =]x_0 - \delta,\, x_0 + \delta\,[\,,\ \delta > 0$ astfel încât $f(x) > 0$ oricare ar fi $x \in]x_0 - \delta,\, x_0 + \delta\ [\cap[a, b]$.

Evident, există $[c, d] \subset]\,x_0 - \delta,\, x_0 + \delta\ [\cap[a, b]$ şi deci $f(x) > 0$ pentru orice $x \in [c, d]$. Dacă notăm cu $m = \inf\limits_{x\in[c,d]} f(x)$, pe baza teoremei Weierstrass, această margine inferioară este atinsă, adică există $x' \in [c, d]$ astfel încât $m = f(x') > 0$ şi încă $f(x) \geq m > 0$, oricare ar fi $x \in [c, d]$.

Aplicând Corolarul 5.3.9 pentru $[c, d] \subset [a, b]$, avem

$$0 < m\,(d - c) \leq \int_c^d f(x)\,d\,x \leq \int_a^b f(x)\,d\,x, \tag{5.3.20}$$

adică chiar (5.3.19).

5.4 Primitive. Integrala nedefinită. Primitivabilitatea funcţiilor continue

5.4.1 Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}$, nevidă, $f{:}D \to \mathbb{R}$ şi $I \subset D$, nevidă. Spunem că funcţia f **admite primitive (este primitivabilă, este o derivată)** pe I, dacă există o funcţie $F\colon I \to \mathbb{R}$, derivabilă pe I şi cu $F'(x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in I$. Funcţia F se numeşte o **primitivă** a funcţiei f pe mulţimea I. Dacă f admite primitive pe întreg domeniul D atunci spunem simplu că $\boldsymbol{f}$ **admite primitive** (fără a mai preciza mulţimea D).

5.4.2 Exemplu. Funcţia $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, admite primitive, deoarece funcţia $F{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x) = x^2 = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5.4.3 Teoremă. *Dacă $f{:}\, I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I este un interval, admite primitive şi dacă $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale sale, atunci*

$$F_1(x) - F_2(x) = c = \text{const}\,,\ \textit{oricare ar fi } x \in I.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, avem $F_1' = F_2' = f$, adică $(F_1 - F_2)' = 0$ şi funcţia $F_1 - F_2$ are derivata nulă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Rezultă că ea este o constantă pe acest interval, deci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$F_1(x) - F_2(x) = c = \text{const}\,,\ \text{pentru orice } x \in I.$$

5.4.4 Observaţie. Dacă $f\colon\ I \to \mathbb{R}$, dar I nu este un interval, atunci teorema precedentă nu este adevărată după cum se vede din următorul exemplu. Fie $f :]-\infty, 0\,[\cup]0, +\infty\,[\to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Funcţiile F_1, $F_2 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, date prin $F_1(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ şi

$$F_2(x) = \begin{cases} 3\,,\ x < 0\,, \\ 0\,,\ x > 0\,, \end{cases}$$

sunt primitive ale lui f pe $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ deoarece $F_1'(x) = 0 = f(x)\,, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ iar $F_2'(x) = 0 = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Cu toate acestea diferenţa lor este

$$F_2(x) - F_1(x) = \begin{cases} 2\,,\ x \in]-\infty, 0\,[\,, \\ -1\,,\ x \in]\,0,\, +\infty\ [\,, \end{cases}$$

adică nu există un $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_2(x) - F_1(x) = c$ pentru orice $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

5.4.5 Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}$ nevidă, $f{:}D \to \mathbb{R}$ şi $I \subset D$ un interval nedegenerat. Dacă f admite primitive pe I atunci f are proprietatea lui Darboux pe I.*

Demonstraţie. Dacă f admite primitive pe I, atunci fie $F{:}I{\to}\mathbb{R}$ una dintre primitive, deci o funcţie derivabilă pe I şi cu $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in I$. Însă derivata oricărei funcţii derivabile pe un interval are proprietatea lui Darboux (Teorema lui Darboux). Astfel că f are proprietatea lui Darboux pe I.

În practică, pentru a arăta că o funcţie nu admite primitive pe un interval este suficient să arătăm că ea nu are proprietata lui Darboux pe acel interval. De exemplu, funcţia f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = [x]$ (partea întreagă a lui x), pentru orice $x \in \mathbb{R}$, nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$, aşa că nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5.4.6 Teoremă. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un interval*

a) D*acă f şi g admit primitive pe I atunci funcţia αf+βg, admite primitive pe I pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

b) *Dacă f admite primitive pe I şi g este derivabilă cu derivata g' continuă atunci funcţia $f \cdot g$ admite primitive pe I.*

Demonstraţia.
a) Fie $F, G : I \to \mathbb{R}$ primitive ale lui f, respectiv g şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g,$$

adică $\alpha f + \beta g$ admite primitive.
b) Fie $F : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Avem

$$(F \cdot g)' = F' \cdot g + F \cdot g' = f \cdot g + F \cdot g',$$

adică

$$f \cdot g = (F \cdot g)' - F \cdot g'.$$

Cum $(F \cdot g)'$ admite primitive (pe $F \cdot g$), iar $F \cdot g'$ e continuă deci admite primitive, rezultă (cu punctul a)) că produsul lor, adică $f \cdot g$ admite primitive pe I.

5.4.7 Definiţie. Fie f: $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I un interval nedegenerat. Dacă f admite primitive pe I, mulţimea tuturor primitivelor lui f pe I se numeşte **integrala nedefinită** a funcţiei f şi ea se notează cu simbolul

$$\int f(x)\, d\,x\,,\ \ x{\in}I.$$

5.4.8 Observaţie. Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval nedegenerat, vom nota cu C mulţimea tuturor funcţiilor constante definite pe I cu valori în $\mathbb{R}$, adică

$C = \{f : I \to \mathbb{R} \,|$ există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = c$, pentru orice $x \in I\}$

Cu această notaţie se constată că

a) $C + C = \{h : I \to \mathbb{R}\,|$există $f \in C$ şi $g \in C$ astfel încât $h = f + g\} = C$,

b) $\alpha \cdot C = C$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Acum putem spune, folosind teorema 5.4.3, că

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \{F : I \to\mathbb{R} \,|\, F \text{ este o primitivă a lui } f \text{ pe } I\}\\ &= \{F_0 + c\,|F_0 \text{ este o primitivă a lui } f \text{ pe } I, c \in C\} = F_0 + C.\end{aligned}$$

2.4.9 Teoremă. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi f :$I \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă Riemann pe I. Dacă $a{\in}$ I, atunci funcţia F:$I{\to}\mathbb{R}$ dată prin*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, d\,t, \tag{5.4.1}$$

este continuă pe I.

Demonstraţie. Fie x_0 un punct oarecare din intervalul I. Dacă x_0 este interior lui I atunci există $r > 0$ astfel încât $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$. Cum f este local integrabilă pe I, f este integrabilă Riemann

pe $[x_0 - r, x_0 + r]$ şi deci mărginită pe acest interval. Fie $M > 0$ astfel încât $|\, f(x)\,| \leq M$ oricare ar fi $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Atunci,

$$\begin{aligned}
|\, F(x) - F(x_0)\,| &= \left| \int_a^x f(t)\, d\,t - \int_a^{x_0} f(t)\, d\,t \right| = \\
&= \left| \int_{x_0}^x f(t)\, d\,t \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |\, f(t)\,|\, d\,t \right| \leq \\
&\leq M\ |\, x - x_0\,|\ ,\ \ x \in]\, x_0 - r, x_0 + r\,[.
\end{aligned}$$

Dacă $\varepsilon > 0$ şi luăm $\delta\,(\varepsilon\,) = \min\left\{r,\ \dfrac{\varepsilon}{M}\right\}$, atunci pentru orice $x \in I$ pentru care $|x - x_0| < \delta$, vom avea $|\, F(x) - F(x_0)| < M\delta \leq \varepsilon$, adică f este continuă în x_0 şi deci continuă pe I.

Dacă $x_0 \in I$ şi este extremitatea stângă a intervalului I, atunci există $r > 0$ astfel încât $[x_0, x_0{+}r] \subset I$ şi f este evident, integrabilă pe $[x_0, x_0 + r]$ şi mărginită, adică $|\, f(x)\,| \leq M$, pentru orice $x \in [x_0, x_0 + r]$. Dacă $x \in]\, x_0, x_0 + r\,[$ putem scrie, ca şi mai înainte

$$|\, F(x) - F(x_0)\,| = \left| \int_{x_0}^x f(t)\, d\,t \right| \leq \int_{x_0}^x |\, f(t)\,|\, d\,t \leq M(x - x_0) < \varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, $\delta\,(\varepsilon\,) = \min\left\{r,\ \dfrac{\varepsilon}{M}\right\}$ şi $x \in I$ cu $|\, x - x_0\,| < \delta$, şi astfel, din nou, funcţia f este continuă în x_0. Analog se tratează cazul în care x_0 este extremitatea dreaptă a intervalului I.

5.4.10 Teoremă. *Fie $f{:}I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I – interval, o funcţie local integrabilă Riemann pe I. Dacă f este continuă pe punctul $x_0 \in I$, atunci pentru orice $a \in I$, funcţia $F{:}I \to \mathbb{R}$ dată prin*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt,$$

oricare ar fi $x \in I$, este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demonstraţie. Deoarece f este presupusă continuă în x_0, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta\,(\varepsilon\,) > 0$ astfel încât pentru orice $t \in I$ cu $|\, t - x_0\,| < \delta$ să avem $|\, f(t) - f(x_0)\,| < \varepsilon$, adică

$$f(x_0) - \varepsilon\ <\ f(t) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{5.4.2}$$

Fie acum $x \in I,\ x > x_0$ astfel încât $|\, x - x_0\,| < \delta$. Atunci dacă $t \in [x_0, x]$ avem $|\, t -\ x_0| \leq |\, x - x_0\,| < \delta$ şi deci are loc (5.4.2). Integrând (5.4.2) între limitele x_0 şi x, obţinem

$$\int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon\,)\, d\,t \leq \int_{x_0}^x f(t)\, d\,t \leq \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon\,)\, d\,t,$$

sau

$$(f(x_0) - \varepsilon\ )\,(x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq (f(x_0) + \varepsilon\,)\,(x - x_0).$$

De aici rezultă

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon,$$

adică

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon. \tag{5.4.3}$$

La această inegalitate se ajunge şi dacă $x < x_0$ şi $t \in [x, x_0]$. Aşadar, pentru orice $x \in I$, $x \neq x_0$ cu $|\, x - x_0\,| < \delta$ are loc (5.4.3), ceea ce înseamnă că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

adică F este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$.

5.4.11 Teoremă. (Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue). *Dacă $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I-interval nedegenerat, este continuă pe I, atunci ea admite primitive pe I pentru orice $a \in I$, funcţia $F : I \to \mathbb{R}$, definită prin*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt,$$

pentru orice $x \in I$, este o primitivă a funcţiei f (adică $F'(x) = f(x)$, $x \in I$) cu proprietatea $F(a) = 0$.

Concluzia teoremei rezultă imediat din teorema 5.4.10, dacă f este continuă în orice $x \in I$. Teorema afirmă că orice funcţie continuă pe un interval admite primitive pe acest interval.

5.4.12 Teoremă. (Teorema de reprezentare a primitivelor unei funcţii continue). *Fie f: $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I-interval, o funcţie continuă pe I. Dacă $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f pe I cu proprietatea $F(a) = 0$ pentru $a \in I$, atunci ea se reprezintă sub forma*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \tag{5.4.4}$$

oricare ar fi $x \in I$.

Demonstraţie. Am văzut la Teorema 5.4.11 că funcţia $\Phi : I \to \mathbb{R}$, dată prin

$$\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt,$$

este o primitivă a lui f pe I. Atunci există o constantă c astfel încât $F(x) = \Phi(x) + c$, $x \in I$. Însă $F(a) = \Phi(a) = 0$ şi deci $c = 0$, astfel că $F(x) = \Phi(x)$, pentru orice $x \in I$.

5.4.13 Observaţie. Teorema precedentă afirmă că orice funcţie continuă pe un interval admite primitive, însă aceasta nu înseamnă că nu există şi funcţii discontinue care admit primitive, cum se vede din exemplul următor.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

discontinuă în $x = 0$ (nu are limită în $x = 0$), $x = 0$ fiind un punct de discontinuitate de speţa a 2-a.

Să arătăm că f admite totuşi primitive pe $\mathbb{R}$. Fie funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$h(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Se constată că h e derivabilă pe $\mathbb{R}$ căci

$$h'(0) = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x\to\infty} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

Deci avem

$$h'(x) = \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} = \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} + \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

adică

$$h'(x) = H(x) + f(x), \quad f(x) = h'(x) - H(x).$$

Funcţia $h'(x)$ admite primitive (căci există funcţia $h = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă având derivata $h'(x)$) iar funcţia $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$, fiind continuă. Deducem că funcţia $f = h' - H$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ (cu Teorema 5.4.6)

5.4.13′. Observaţie. Dacă $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I-$interval are un punct de discontinuitate de speţa 1-a, $x_0 \in I$, atunci ea nu poate admite primitive. Într-adevăr, dacă am presupune contrariul, fie $F : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa, deci

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Însă $F'_s(x_0) \neq F'_d(x_0)$, căci $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, adică F nu e derivabilă în x_0, contrar presupunerii.

Noţiunea de primitivă a unei funcţii se poate generaliza în sensul următor

5.4.14 Definiţie. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Se numeşte **primitivă generalizată** a lui f, orice funcţie $F : I \to \mathbb{R}$, derivabilă pe I cu excepţia unei mulţimi finite de puncte din I şi astfel ca $F'(x) = f(x)$ în toate punctele de derivabilitate şi F continuă în punctele de excepţie.

5.4.15 Teoremă (Formula lui Newton–Leibniz). Fie f:$[a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann pe $[a, b]$ şi primitivabilă pe $[a, b]$. Atunci oricare ar fi $F : [a, b]\to \mathbb{R}$, o primitivă a lui f are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)\, d\, x = F(b) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^b . \tag{5.4.5}$$

Demonstraţie. Să considerăm un şir de diviziuni $\Delta_n := (x_0, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)})$ ale intervalului $[a,b]$ cu $\nu\,(\Delta_n) \to 0$ când $n \to \infty$ şi $\xi^n = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in P(\Delta_n)$ un sistem de puncte intermediare asociate diviziunii Δ_n, obţinut prin aplicarea formulei creşterilor finite primitivei F pe $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$,

$$F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)}) = F'(\xi_i)\,(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = f(\xi_i)(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}),$$

valabilă pentru orice $i = \overline{1, n}$. Atunci suma Riemann corespunzătoare va fi

$$\sigma\ (f, \Delta_n, \xi^n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} (\,F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)})) = F(b) - F(a).$$

Deducem că

$$\int_a^b f(x)\, d\, x = \lim_{n \to \infty} \sigma\ (f, \Delta_n, \xi^n) = F(b) - F(a).$$

5.4.15 Exemplu. Să considerăm funcţia $f : [2, 5] \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}\,,\ x \in [2,\, 5].$$

Funcţia f este continuă pe $[2,\, 5]$, deci integrabilă Riemann (Teorema 5.4.11). Funcţia f admite şi primitive pe $[2, 5]$ deoarece funcţia $F : [2, 5]\to \mathbb{R}$, dată prin $F(x) = \ln\,(x-1) - \ln\ x$, este o primitivă a sa, având

$$F'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}.$$

Aplicând formula lui Newton–Leibniz (5.4.5) obţinem

$$\int_2^5 \frac{1}{x(x-1)}dx = \ [\ln(x-1) - \ln x]|_2^5 = \ln 4 - \ln 5 - \ln 1 + \ln 2 = \frac{8}{5}.$$

5.4.16 Observaţie. Aplicarea formulei Newton – Leibniz pretinde ca f să fie în acelaşi timp şi integrabilă şi primitivabilă pe intervalul $[a,\ b]$. Acest lucru nu este realizat de multe ori deoarece există funcţii care admit primitive pe $[a,\ b]$ dar nu sunt integrabile pe $[a,\ b]$ şi de asemenea există funcţii integrabile pe $[a, b]$ dar care nu admit primitive pe $[a,\ b]$.

5.4.17 Exemplu (Funcţie integrabilă Riemann care nu admite primitive).
Fie $f : [-1,\ 1] \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, \text{ dacă } x \in [-1, 0]\,, \\ 2\,, \text{ dacă } x \in]0, 1]\,. \end{cases}$$

Funcţia f este mărginită pe $[-1,\ 1]$ şi are un singur punct de discontinuitate $x_0 = 0$, deci este integrabilă Riemann pe $[-1,\ 1\,]$ (Teorema 5.2.16), însă funcţia f nu are proprietatea Darboux pe $[-1,\ 1\,]$ (deoarece nu ia nici o valoare $\lambda \in]\,1,\ 2\,[$), deci nu are primitive.

5.4.18. Exemplu. (Funcţie care admite primitive dar care nu este integrabilă). Funcţia $f : [0,\ 1\,] \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} \sin\dfrac{1}{x^2}\,, & \text{dacă } x \in]\,0, 1], \\ 0, & \text{dacă } x = 0\,. \end{cases}$$

Funcţia f nu este mărginită pe $[0, 1]$ în vecinătatea lui 0, deci f nu este integrabilă Riemann pe $[0, 1]$. Însă, funcţia f admite primitive pe $[0, 1]$ deoarece funcţia $F : [0,\ 1\,] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x^2}\,, & \text{dacă } x \in]\,0, 1], \\ 0, & \text{dacă } x = 0\,, \end{cases}$$

este o primitivă a lui f având $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

5.4.19. Exemplu. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} -e^x, & x \geq 0, \\ x - 1, & x < 0, \end{cases}$$

admite primitive şi să se determine primitivele sale.

Se constată că f e continuă pe $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ fiind exprimată pe aceste intervale prin funcţii elementare, deci continue. În punctul $x = 0$ avem

$$\begin{aligned} f(0-0) &= \lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0}(x-1) = -1, \\ f(0+0) &= \lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} -e^x = -e^0 = -1, \\ f(0) &= -e^0 = -1 \end{aligned}$$

Deci f e continuă în $x = 0$, deci continuă pe $\mathbb{R}$. Cu Teorema 5.4.11 se deduce că f admite primitive. Primitivele ei vor avea forma

$$F(x) = \begin{cases} \int -e^x dx, & x \geq 0, \\ \int (x-1)dx, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -e^x + C_1, & x \geq 0, \\ \dfrac{x^2}{2} - x + C_2, & x < 0, \end{cases}$$

unde C_1, C_2 sunt constante arbitrare. Legătura dintre constantele C_1 şi C_2 se obţine din condiţia că F, ca primitivă a lui f să fie derivabilă, deci continuă pe $\mathbb{R}$, deci şi în $x = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} F(0-0) &= \lim_{x\nearrow 0} F(x) = \lim_{x\nearrow 0}\left(\frac{x^2}{2} - x + C_2\right) = C_2, \\ F(0+0) &= \lim_{x\searrow 0} F(x) = \lim_{x\searrow 0}(-e^x + C_1) = C_1 - 1 = F(0). \end{aligned}$$

Deducem că $C_2 = C_1 - 1$. Dacă punem $C_1 = C$, atunci $C_2 = C - 1$ şi primitivele lui f vor fi

$$F(x) = \begin{cases} -e^x + C, & x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} - x - 1 + C, & x < 0,\ C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pentru $C = 0$, o primitivă a lui f va fi

$$F_0(x) = \begin{cases} -e^x, & x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} - x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

şi atunci $F(x) = F_0(x) + C$, reprezintă mulţimea primitivelor, adică

$$\int f(x)dx = F_0(x) + C.$$

Formula lui Newton – Leibniz (5.4.5) rămâne valabilă pentru o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann pe $[a, b]$ care admite pe $[a, b]$ primitive generalizate (conform definiţiei 5.4.13) . Nu facem demonstraţia.

5.4.20 Observaţie. Vom enumera primitivele unor funcţii elementare pe un interval I inclus în domeniul maxim de definiţie.

1^0. $\int 0\, d\,x = C$;

2^0. $\int x^\alpha\, d\,x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1$;

3^0. $\int \dfrac{1}{x}\, d\,x = \ln|\,x\,| + C$;

4^0. $\int a^x\, d\,x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$;

5^0. $\int e^x\, d\,x = e^x + C$;

6^0. $\int \sin x\, d\,x = -\cos x + C$;

7^0. $\int \cos x\, d\,x = \sin x + C$;

8^0. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\, d\,x = \operatorname{tg} x + C$;

9^0. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\, d\,x = -\operatorname{ctg} x + C$;

10^0. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$, $a \neq 0$;

11^0. $\int \dfrac{d\,x}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$, $a \neq 0$;

12^0. $\int \dfrac{d\,x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;

13^0. $\int \dfrac{d\,x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$;

14^0. $\int \dfrac{d\,x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$.

5.5 Calculul unor primitive şi metode de integrare

În acest paragraf vom prezenta proprietăţile integralei nedefinite, formula integrării prin părţi şi teoremele de schimbare de variabilă atât pentru integrala nedefinită cât şi pentru integrala Riemann.

5.5.1 Teoremă. *Dacă f, g:$I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I–interval, admit primitive pe I atunci şi funcţia $f + g$ admite primitive pe I şi are loc pentru orice $x \in I$ relaţia*

$$\int (f + g)(x)\, d\,x = \int f(x)\, d\,x + \int g(x)\, d\,x.$$

Proprietatea se extinde uşor şi la o sumă finită de funcţii care admit primitive.

Demonstraţie. Considerăm primitivele F:$I \to \mathbb{R}$ a lui f şi G:$I \to \mathbb{R}$ a lui g. Funcţia $F + G : I \to \mathbb{R}$ va fi atunci derivabilă şi

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x),$$

pentru orice $x \in I$, deci va fi primitivă a lui $f+g$, adică $f+g$ admite primitive pe I şi avem pentru orice $x \in I$

$$\int f(x)\,d\,x = F(x) + C\,, \quad \int g(x)\,d\,x = G(x) + C\,,$$

şi deci

$$\int f(x)\,d\,x + \int g(x)\,d\,x = F(x) + C + G(x) + C = (F+G)(x) + C = \int (f+g)(x)\,d\,x.$$

5.5.2 Teoremă. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}$, atunci funcţia $a\,f$ cu $a \neq 0$ admite primitive şi avem*

$$\int a\,f(x)\,d\,x = a \int f(x)\,d\,x\,, \quad x \in I.$$

Într-adevăr, dacă F este o primitivă a lui f avem pentru orice $x \in I$

$$a \int f(x)\,d\,x = a(F(x) + C) = a\,F(x) + a\,C = (a\,F)(x) + C = \int (af)(x)\,d\,x + C.$$

5.5.3 Observaţie. Dacă $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I – interval, este o funcţie derivabilă pe I, primitiva funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$, atunci avem

$$\begin{array}{ll} 1^0. & \int F'(x)\,d\,x = F(x) + C\,, \ \ x \in I; \\ 2^0. & \left(\int f(x)\,d\,x\right)' = f(x)\,, \ x \in I. \end{array}$$

Relaţiile acestea sunt evidente, având în vedere definiţia primitivei şi a integralei nedefinite.

5.5.4 Teoremă. (formula integrării prin părţi). *Dacă funcţiile f,g:$I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I – interval, sunt derivabile pe I şi derivatele lor f' şi g' sunt continue pe I, atunci are loc relaţia*

$$\int f'(x)\,g(x)\,d\,x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,d\,x. \tag{5.5.1}$$

Demonstraţie. Deoarece f' şi g' sunt presupuse continue pe I, rezultă că şi funcţiile f şi g sunt continue şi atunci funcţiile $f'g$ şi fg' sunt continue pe I, deci admit primitive pe I.
Din relaţia $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$, se deduce că $f\cdot g$ este o primitivă a funcţiei $f'\,g + f\,g'$, astfel că

$$\int (f'\cdot g + f\cdot g')(x)\,d\,x = (f\cdot g)(x) + C\,, \ \ x \in I.$$

De aici se deduce că

$$\int (f'\cdot g)(x)\,d\,x + \int (f\cdot g')(x)\,d\,x = f(x)\cdot g(x) + C\,, \ \ x \in I.$$

Însă, deoarece $\int (f\,g')(x)\,d\,x - C = \int (f\,g')(x)\,d\,x$ se deduce că

$$\int (f'g)(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int (f\cdot g')(x)\,dx,$$

adică relaţia cerută.

5.5.5 Observaţie. Formula (5.5.1) este o egalitate între două mulţimi de funcţii şi dacă F_1, este de exemplu o primitivă particulară a funcţiei $f'\,g$ şi F_2, o primitivă particulară a lui $f\,g'$ este posibil ca să avem $F_1 \neq f\cdot g - F_2$.

5.5.6 Exemplu. Utilizând formula integrării prin părţi, avem

$$\begin{aligned} \int \ln x\,d\,x &= \int x'\,\ln x\,d\,x = x\,\ln x - \int x\,(\ln x)'\,d\,x \\ &= x\,\ln x - \int d\,x = x\ln x - x + C\,, \ \ x > 0. \end{aligned}$$

5.5.7 Exemplu.

$$\begin{aligned}\int x\,\cos\,x\;dx &= \int x\,(\sin\,x)' = x\,\sin\,x - \int \sin x\;dx\\ &= x\,\sin\,x + \cos\,x + C,\; x\in I\subset\mathbb{R}.\end{aligned}$$

5.5.8 Exemplu.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg}\,x\,d\,x &= \int x'\operatorname{arctg} x\,d\,x = x\operatorname{arctg} x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\;d\,x =\\ &= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\,,\;\; x\in\mathbb{R} \text{ sau } x\in I\subset\mathbb{R}.\end{aligned}$$

5.5.9 Exemplu. Să calculăm integrala

$$\begin{aligned}\int\sqrt{4-x^2}\,d\,x &= \int\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,d\,x = 4\int\frac{d\,x}{\sqrt{4-x^2}} + \int x\cdot(\sqrt{4-x^2})'dx =\\ &= 4\,\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} - \int\sqrt{4-x^2}\,d\,x\;,\;\;\; x\in]-2\,,2[.\end{aligned}$$

De aici se explicitează

$$\int\sqrt{4-x^2}\,d\,x = 2\,\arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,x\sqrt{4-x^2} + C\,,\;\; x\in]-2,\,2\,[.$$

5.5.10 Teoremă. (Formula integrării prin părţi generalizată). *Dacă $f,\ g : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I–interval, au derivate până la ordinul $n>1$ continue pe I, atunci are loc formula*

$$\int f^{(n)}(x)\,g(x)\,d\,x = f^{(n-1)}(x)\,g(x) - f^{(n-2)}(x)\,g'(x) + f^{(n-3)}(x)g''(x) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\,f(x)\cdot g^{(n-1)}(x) + (-1)^n\int f(x)\,g^{(n)}(x)\,d\,x\,,\;\; x\in I. \tag{5.5.2}$$

Demonstraţie. Cu formula integrării prin părţi (5.5.1), putem scrie

$$\int f^{(n-k)}(x)\,g^{(k)}(x)\,d\,x = f^{(n-k-1)}(x)\,g^{(k)}(x) - \int f^{(n-k-1)}(x)\,g^{(k+1)}(x)\;d\,x\,,$$

pentru $k=0,\,1,\,2,\ldots,\,n-1$ şi $x\in I$. Aici $f^{(0)}(x)$ înseamnă $f(x)$.

De aici, dacă înmulţim în ambii membri egalitatea cu $(-1)^k$, obţinem

$$(-1)^k\int f^{(n-k)}(x)\,g^{(k)}(x)\,d\,x = (-1)^k f^{(n-k-1)}(x)\,g^{(k)}(x) + (-1)^{k+1}\int f^{(n-k-1)}(x)\,g^{(k+1)}(x)\;d\,x\,,.$$

Dacă adunăm membru cu membru egalităţile obţinute de aici pentru $k=0,\,1,\,2,\ldots,\,n-1$, se obţine tocmai formula cerută (5.5.2).

5.5.11 Exemplu. Să se calculeze $\int x^n\,e^x\,d\,x\,,\;n\in\mathbb{R},\,n>1.$

Dacă considerăm funcţiile $f(x)=e^x\,,\;g(x)=x^n\,,\;x\in\mathbb{R}$, avem

$$f'(x)=e^x,\;\; f''(x)=e^x,\;\ldots\;,f^{(n)}(x)=e^x$$

$$g'(x)=n\,x^{n-1},\; g''(x)\;=n\,(n-1)\,x^{n-2},\;\ldots\;,\,g^{(k)}(x)=$$

$$=n(n-1)\ldots(n-k+1)\,x^{n-k},\ldots g^{(n-1)}(x)=n\,!\,x\,,\;g^{(n)}(x)=n\,!$$

Aplicând formula (5.5.2), avem

$$\int x^n e^x\,d\,x = e^x\cdot x^n - n\,x^{n-1}e^x + n(n-1)\,x^{n-2}\,e^x - \ldots +$$

$$+(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)\,x^{n-k}e^x+\dots+(-1)^n\int e^x{\cdot}n\,!\,dx=$$
$$=e^x[x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}-\dots+(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}+\dots$$
$$+(-1)^{n-1}\,n\,!\,x+(-1)^n\,n\,!]=e^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)\,x^{n-k}\,,\ x\in\mathbb{R}.$$

5.5.12 Teoremă (prima metodă de schimbare de variabilă). *Fie I, J intervale din $\mathbb{R}$ şi funcţiile $u:I\to J$, $f{:}J\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile:*

(i) *u este derivabilă pe I, cu $u'\neq 0$,*

(ii) *f admite primitive pe J şi $F:J\to\mathbb{R}$ este o primitivă a sa.*

Atunci funcţia $(f\circ u)\,u'$ admite primitive pe I şi $F\circ u$ este o primitivă a sa, adică are loc egalitatea

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,d\,x=F(u(x))+C\,,\ x\in I \tag{5.5.3}$$

Demonstraţie. Deoarece $F'(t)=f(t)$ oricare ar fi $t\in J$ şi funcţia compusă $F\circ u$ este derivabilă pe I, avem pentru orice $x\in I$

$$((f\circ u)\,(x)+C)'=(\,F(u(x))+C)'=F'(u(x))\cdot u'(x)=f(u(x))\cdot u'(x),$$

ceea ce dovedeşte că $F\circ u$ este o primitivă a lui $(f\circ u)\,u'$.

5.5.13 Observaţie. Practic, pentru a calcula $\int g(x)\ d\,x$, unde $g{:}I\to\mathbb{R}$ se procedează astfel:

a) Încercăm să punem în evidenţă o funcţie $u:I\to\mathbb{R}$ derivabilă şi o funcţie f care admite primitive, $f:u(I)\to\mathbb{R}$ astfel ca $g(x)=f(u(x))\,u'(x)$.

b) Determinăm o primitivă F a lui f pe intervalul $J=u(I\,)$, adică

$$\int f(t)\,d\,t=F(t)+C;$$

c) Atunci, o primitivă a funcţiei $g=(f\circ u)\cdot\,u'$ este $F\circ u$, adică

$$\int g(x)\,d\,x=\int f(u(x))\,u'(x)\,d\,x=F(u(x))+C\,,\ \ x\in I.$$

5.5.14 Exemplu. Să calculăm

$$\int \operatorname{tg}x\,d\,x\ ,\ \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[=I.$$

Putem scrie $g(x)=\dfrac{-1}{\cos\,x}(\cos\,x)'$ pentru $x\in\left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ şi atunci luăm $u(x)=\cos\,x$, $u{:}\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ şi $f(t)=-\dfrac{1}{t}\,,\ t\in]\,0\,,\,1\,]$. Atunci $g(x)=f(u(x))\,u'(x)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ şi o primitivă a funcţiei f pe $]0,1]$ este $F(t)=-\ln\ t$ şi deci

$$\int f(t)\,d\,t=\int\ -\frac{1}{t}\,d\,t=-\ln\,t+C\,,\ t\in]\,0\,,\,1\,].$$

Rezultă că o primitivă a funcţiei g pe $\left[0,\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ este $F\circ u$, adică

$$\int \operatorname{tg}x\,d\,x=-\ln\,\cos x+C\,,\,x\in\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right[.$$

5.5.15 Observaţie. Formal, dacă interpretăm pe dx ca diferenţială, atunci $u'(x)\,d\,x=d\,u$ (diferenţiala funcţiei u) şi formula schimbării de variabilă (5.5.3) se scrie formal

$$\int f(u)\,d\,u{=}F(u)+C.$$

Se poate atunci, formal, proceda astfel: pentru a calcula $\int f(u(x))\,u'(x)\,d\,x$, se face înlocuirea $u(x) = t$ şi se diferenţiază ca o egalitate de funcţii obţinându-se $u'(x)\,d\,x = d\,t$ şi atunci

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,d\,x = \int f(t)\,d\,t = F(t) + C = F(u(x)) + C.$$

Această egalitate este formală, nu este egalitate obişnuită de funcţii deoarece $\int f(u(x))\,u'(x)\,d\,x$ sunt funcţii definite pe I pe când $\int f(t)\,d\,t$ sunt primitivele lui f, deci sunt definite pe J.

5.5.16 Exemplu. Să se calculeze

$$\int \frac{2x}{x^4+5}\,d\,x\ ,\quad x \in \mathbb{R}.$$

Deoarece

$$\frac{2x}{x^4+5} = \frac{(x^2)'}{(x^2)^2+5},$$

luăm $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = x^2$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{5+t^2}\ ,\ t \in \mathbb{R}$. Avem

$$\int f(t)\,d\,t = \int \frac{1}{5+t^2}\,d\,t = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C\ ,\quad t \in \mathbb{R},$$

şi apoi

$$\int \frac{2x}{x^4+5}\,d\,x = \int \frac{(x^2)'}{(x^2)^2+5}\,d\,x = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{5}} + C\ ,\quad x \in \mathbb{R}.$$

Formal, putem proceda aşa: înlocuim $x^2 = t\,,\ 2\,x\,d\,x = d\,t$ şi atunci

$$\int \frac{2\,x}{x^4+5}\,d\,x = \int \frac{d\,t}{5+t^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{5}} + C.$$

Aplicând observaţiile 5.5.13 şi 5.5.15 putem da câteva primitive ale funcţiilor compuse (în ipoteza că

$u : I \to \mathbb{R}$, I–interval, este derivabilă cu derivata continuă):

1^0. $\int u^n(x)\,u'(x)\,dx = \dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$;

2^0. $\int u^\alpha(x)\,u'(x)\,dx = \dfrac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$;

3^0. $\int \dfrac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln\,|\,u(x)\,| + C$;

4^0. $\int a^{u(x)} \cdot u'(x)\,dx = \dfrac{a^{u(x)}}{\ln\,a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$;

5^0. $\int \sin\,u(x)\,\cdot u'(x)\,dx = -\,\cos\,u(x) + C$;

6^0. $\int \cos u(x)\,\cdot u'(x)\,dx = \sin u(x) + C$;

7^0. $\int \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}\,dx = \mathrm{tg}\,u(x) + C$;

8^0. $\int \dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}\,dx = -\mathrm{ctg}\,u(x) + C$;

9^0. $\int \dfrac{u'(x)}{\sqrt{a^2 - u^2(x)}}\,dx = \arcsin\,\frac{u(x)}{a} + C$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

10^0. $\int \dfrac{u'(x)}{a^2 + u^2(x)}\,dx = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\dfrac{u(x)}{a} + C$, $a \neq 0$;

11^0. $\int \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) + a^2}}\,dx = \ln\left(u(x) + \sqrt{a^2 + u^2(x)}\right) + C$, $a \neq 0$;

12^0. $\int \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - a^2}}\,dx = \ln\left|\,u\,(x) + \sqrt{u^2(x) - a^2}\right| + C$, $a \neq 0$.

5.5.17 Teoremă. (a doua metodă de schimbare de variabilă). *Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale şi $f : I \to \mathbb{R}$, $u : J \to I$, funcţii cu proprietăţile:*

1^0. u este bijectivă, derivabilă pe J şi cu $u'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in J$,

2^0. funcţia compusă $h = (f \circ u)\,u'$ admite primitive pe J, H fiind o primitivă a sa. Atunci funcţia f admite primitive pe I şi o primitivă a sa este $H \circ u^{-1}$, adică avem egalitatea

$$\int f(x)\,dx = H\,(u^{-1}(x)) + C. \tag{5.5.4}$$

Demonstraţie. Dacă $H : J \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui $h = (f \circ u)\,u'$ pe J, atunci avem $H'(t) = h(t) = f(u(t)) \cdot u'(t)$ oricare ar fi $t \in J$. Apoi se deduce că $u^{-1} : I \to J$ este derivabilă pe I şi

$$(u^{-1})'(x) = \frac{1}{u'(t)} = \frac{1}{u'(u^{-1}(x))}.$$

Atunci

$$\begin{aligned}(H \circ u^{-1})'(x) &= [H(u^{-1}(x))]' = H'(u^{-1}(x)) \cdot (u^{-1}(x))' \\ &= h(u^{-1}(x))(u^{-1}(x))' \\ &= f(u(u^{-1}(x)) \cdot u'(u^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{u'(u^{-1}(x))} = f(x), \text{ oricare ar fi } x \in I.\end{aligned}$$

De aici se deduce că $H \circ u^{-1}$ este o primitivă a lui f şi are loc (5.1.4).

5.5.18 Observaţie. Aplicarea concretă a teoremei 5.5.17 se face în felul următor: vrem să calculăm $\int f(x)\, dx$, unde f: $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie care admite primitive pe I, atunci procedăm astfel

1^0. Punem în evidenţă o funcţie u:$J \to I$, J–interval, bijectivă şi derivabilă pe J cu derivata nenulă pe J şi fie $u^{-1} : I \to J$, inversa ei (se spune că u^{-1} schimbă variabila x în variabila t).

2^0. Determinăm o primitivă H:$J \to \mathbb{R}$ a funcţiei $h = (f \circ u)\, u'$, deci

$$\int f(u(t))\, u'(t)\, dt = H(t)+C.$$

3^0. Atunci $H \circ u^{-1}$ va fi o primitivă a lui f pe I, adică

$$\int f(x)\, dx = H(u^{-1}(x)) + C \ , \ \ x \in I.$$

Formal se face înlocuirea $x = u(t)$, $dx = u'(t)\, dt$, şi atunci $t = u^{-1}(x)$. Integrala devine

$$\int f(x)\, dx = \int f(u(t))\, u'\,(t)\, dt = H(t) + C = H(u^{-1}(x))+C.$$

5.5.19 Exemplu. Să calculăm

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx\ , \quad x \in]-1,\, 1\,[\, = I.$$

Considerăm funcţia $u : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ \to]-1,1[$, $u(t) = \sin\, t$, derivabilă şi bijectivă pe $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ şi $u'(t) = \cos\ t \neq 0$ pentru orice $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Atunci funcţia $h = (f \circ u)\, u'$ este

$$h(t) = \sqrt{1-u^2(t)} \cdot u'(t) = \sqrt{1-\sin^2\, t} \cdot \cos\, t = \cos^2\, t,$$

pentru orice $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sau $h(t) = \frac{1}{2}\,(1+\cos\, 2t)$ şi are primitive pe $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; o primitivă a sa este $H : \left]-\frac{\pi}{2}\, ,\, \frac{\pi}{2}\right[\ \to \mathbb{R}$,

$$H(t) = \frac{1}{2}\ \left(t + \frac{1}{2}\ \sin\, 2t\right) = \frac{1}{2}\,(t + \sin\, t\ \cos\ t), t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Atunci

$$\int f(x)\, dx = \int \sqrt{1-x^2}\, dx = H(u^{-1}(x)) + C = H(\arcsin x) + C = \frac{1}{2}\,(\arcsin\ x + x\,\sqrt{1-x^2}\ ) + C.$$

5.5.20 Exemplu. Să calculăm

$$\int \frac{dx}{\sin\ x}\, , \qquad x \in]\,0,\, \pi\,[=I.$$

Formal, înlocuim $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = t,\ x = 2\mathrm{arctg}\, t\, ,\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\, dt.$

Mai avem

$$\sin\ x = \frac{2\mathrm{tg}\ \dfrac{x}{2}}{1 + tg^2\ \dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\ , \quad t \in]\,0\, ,\ +\infty\, [,$$

şi integrala se scrie succesiv

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin\ x} \quad &= \quad \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt= \\ &= \quad \int \frac{1}{t}\, dt = \ln\ |\, t\, | + C = \ln\ \left|\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}\ \right| + C. \end{aligned}$$

5.5.21 Observaţie. Fie I, $J \subset \mathbb{R}$ intervale şi $u{:}I \to J$, $f{:}J \to \mathbb{R}$ funcţii cu proprietăţile
(i) u este bijectivă, derivabilă pe I cu derivata continuă şi diferită de zero pe I;
(ii) f este continuă pe J.

Evident că în ipotezele noastre f admite primitive şi fie $F{:}J \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa. Atunci, pe baza Teoremei 5.5.12, deducem că funcţia $F \circ u$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ u)\, u'$ pe I.

Invers, să presupunem că $H = F \circ u$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ u)\, u'$ pe I. Pe baza Teoremei 5.5.17 funcţia $H \circ u^{-1} = F \circ u \circ u^{-1} = F$ este o primitivă a lui f. Aşadar, în ipotezele (i) şi (ii), funcţia $F{:}J \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f pe J dacă şi numai dacă $F \circ u$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ u)\, u'$. Altfel spus, în ipotezele (i) şi (ii) cele două metode de schimbare de variabile sunt echivalente, există doar mai multe variante de aplicare a unei metode unice de schimbare de variabilă.

Varianta I. Pentru a calcula
$$\int f(x)\, dx\,, \quad x \in I;$$

1^0. Scriem pe $f(x) = g(u(x))\, u'(x)$, unde $u : I \to J$, derivabilă iar $g : J \to \mathbb{R}$ o funcţie care are primitive, G fiind o primitivă;

2^0. Se înlocuieşte formal $u(x) := t$ şi $u'(x)\, dx := dt$ şi se obţine
$$\int g(t)\, dt = G(t) + C\,, \quad t \in J;$$

3^0. Revenim la variabila x, înlocuind $t := u(x)$ în $G(t)$ şi obţinem
$$\int f(x)\, dx = G(u(x)) + C.$$

Varianta a II-a. Pentru a calcula
$$\int f(x)\, dx\,, \quad x \in I;$$

1^0. Punem în evidenţă un interval $J \subset \mathbb{R}$ şi o funcţie $u : J \to I$, derivabilă şi bijectivă şi înlocuim
$$x := u(t)\,,\ t \in J, dx := u'(t)\, dt$$
şi obţinem integrala
$$\int f(u(t))\, u'(t)\, dt\,, \quad t \in J;$$

2^0. Găsim o primitivă H şi atunci
$$\int f(u(t))\, u'(t)\, dt = H(t) + C\,, \quad t \in J;$$

3^0. Revenim la variabila x, înlocuind în H pe $t := u^{-1}(x)$ şi obţinem
$$\int f(x)\, dx = H(u^{-1}(x)) + C.$$

Varianta a III-a. Pentru a calcula
$$\int f(x)\, dx\,, \quad x \in I;$$

1^0. Punem în evidenţă în expresia lui $f(x)$, o funcţie $u : I \to \mathbb{R}$ injectivă şi derivabilă cu $u^{-1} : u(I) \to I$ şi o funcţie $g : u(I) \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = g(u(x))\,,\ x \in I$;

2^0. Înlocuim formal
$$\begin{aligned} u(x) &:= t,\ x := u^{-1}(t)\,, \\ dx &:= (u^{-1}(t))'\, dt \end{aligned}$$

şi se obţine integrala

$$\int g(t)\,(u^{-1}(t))'\,d\,t = F(t) + C\,,\ \ t \in u(I\,);$$

3^0. Revenim la variabila x, punând $t\, := \, u(x)$ în expresia lui F şi astfel avem

$$\int f(x)\,d\,x = F(u(x)) + C\,,\ \ x \in I.$$

5.5.22 Exemplu. Să se calculeze (cu varianta a III-a)

$$\int \frac{\sin\, x}{3\,\sin^2 x + 1}\,d\,x\,,\quad x \in]\,0,\,\pi\ [.$$

Punem $\cos\, x = t\,,\ x\, := \,\arccos\ t,\ t \in]-1\,,\,1\,[\,,\ d\,x = -\,\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,d\,t$ şi se obţine

$$\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{3\,(1-t^2)+1}\ \frac{-\,d\,t}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{d\,t}{3t^2-4} = \frac{1}{3}\int \frac{d\,t}{t^2-\dfrac{4}{3}} =$$

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{2\dfrac{2}{\sqrt{3}}}\ln\left|\frac{t-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{t+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t\sqrt{3}-2}{t\sqrt{3}+2}\right| + C\,,\ t \in]-1,1[.$$

Atunci

$$\int \frac{\sin\, x}{3\,\sin^2 x + 1}\ d\,x\ = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\,\cos\ x - 2}{\sqrt{3}\ \cos\ x + 2}\right| + C.$$

5.5.23 Observaţie. Problema determinării primitivelor este mult mai dificilă decât problema derivării. Determinarea primitivelor se poate face, cu metodele pe care le-am prezentat, doar pentru clase restrânse de funcţii elementare. Există multe funcţii despre care deşi ştim că admit primitive, acestea nu se pot calcula, nu se pot exprima într-un număr finit de operaţii asupra unor funcţii elementare, deci nu sunt funcţii elementare. Primitivele acestor funcţii ne definesc noi funcţii, numite **funcţii transcendente**, funcţii care sunt tabelate, valorile lor sunt date în tabele. Menţionăm câteva funcţii dintre acestea:

$$er\,(x) = \int e^{-x^2}\,d\,x\,,\ x \in R;\quad li\,(x) = \int \frac{1}{\ln\ x}\ d\,x\,,\ \ x \in]\,1\,,\,\infty\,[\tag{5.5.5}$$

$$si\,(x) = \int \frac{\sin\, x}{x}\,d\,x\ ,\ \ x \in]\,0,+\infty[;\ ci\,(x) = \int \frac{\cos\ x}{x}\ d\,x\,, x \in]0,+\infty[\tag{5.5.6}$$

Tot în această categorie intră şi **integralele eliptice**, având forma

$$\int R\ (x,\ \sqrt{P(x)}\ )\,d\,x, \tag{5.5.7}$$

unde $P\ (x)$ este un polinom de gradul 3 sau 4, iar $R(x,\,y)$ este o funcţie raţională în x şi y.

Se arată că integralele (5.5.7) se pot transforma în una din următoarele trei integrale

$$I_1(x) = \int \frac{d\,x}{\sqrt{(1-x^2)(1-a^2x^2)}}\,, \tag{5.5.8}$$

$$I_2(x) = \int \frac{x^2\,d\,x}{\sqrt{(1-x^2)(1-a^2x^2)}}\,, \tag{5.5.9}$$

$$I_3(x) = \int \frac{dx}{(1+kx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-a^2x^2)}}, \tag{5.5.10}$$

unde $a, k \in \mathbb{R}$, $a \in]0,1[$.

Formula integrării prin părţi, simplă şi generalizată, şi metodele de schimbare de variabilă se pot extinde, cu ajutorul formulei Newton – Leibniz şi la integrale Riemann (integrale definite).

5.5.24 Teoremă. (formula integrării prin părţi pentru integrale Riemann). *Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe $[a,b]$ şi au derivatele f', g' continue pe $[a,b]$ atunci are loc egalitatea*

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, d\,x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, d\,x. \tag{5.5.11}$$

Demonstraţie. Din teorema de derivare a unui produs, avem

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\,, \quad x \in [a,b].$$

Pe baza formulei Newton – Leibniz (5.4.5.), obţinem

$$f(x)\cdot g(x)|_a^b = \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\, d\,x + \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\, d\,x,$$

iar de aici rezultă (5.5.11).

5.5.25 Teoremă. (formula generalizată de integrare prin părţi). *Dacă f,g : $[a,\, b] \to \mathbb{R}$ au derivate continue până la ordinul n, $n > 1$ pe $[a,\, b]$ atunci are loc egalitatea*

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(n)}(x)\, g(x)\, d\,x &= \Big[f^{(n-1)}(x)\, g(x) - f^{(n-2)}(x)\, g'(x) + f^{(n-3)}(x)\, g''(x) - \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} f(x)\, g^{(n-1)}(x)\Big]\Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)\cdot g^{(n)}(x)\, d\,x \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

Demonstraţie. Demonstraţia se bazează pe teorema 5.5.10 şi formula Newton – Leibniz, obţinându-se fără probleme relaţia (5.5.12).

5.5.26 Exemplu. Să se calculeze integralele

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, d\,x \text{ şi } B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, d\,x.$$

Pentru A_n aplicăm teorema 5.5.24 şi avem

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\cdot(-\cos\ x)'\, d\,x = -\sin^{n-1} x \cos\ x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x\, dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,(\,1-\sin^2 x)\, d\,x = (n-1)\, A_{n-2} - (n-1)\, A_n \end{aligned}$$

De aici se obţine relaţia de recurenţă

$$A_n = \frac{n-1}{n}\, A_{n-2}, n \geq 2.$$

Pentru $n = 2k$, obţinem, prin aplicare repetată pentru $k = 1, 2, ...,$

$$A_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\cdot A_0,$$

cu $A_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\,x = \dfrac{\pi}{2}$. Deci

$$A_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-3)(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k}\cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)\,!!}{(2k)\;!!}\cdot \frac{\pi}{2}. \tag{5.5.13}$$

Dacă $n = 2k+1$ se obţine fără dificultate

$$A_{2k+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2k-2)(2k)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)(2k+1)} = \frac{(2k)\,!!}{(2k+1)\;!!}. \tag{5.5.14}$$

Pentru integrala B_n se observă că dacă se face schimbarea de variabilă $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, se obţine $B_n = A_n$ şi astfel

$$A_n = B_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)\,!!}{n\,!!}\cdot \dfrac{\pi}{2}\,, & \text{dacă } n \text{ este par}\,, \\ \dfrac{(n-1)\,!!}{n\,!!}\,, & \text{dacă } n \text{ este impar}\,. \end{cases} \tag{5.5.16}$$

Aici, notaţia n !! (dublu factorial de n) înseamnă că factorii produsului n ! se iau din doi în doi, adică

$$n\,!! = \begin{cases} 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot n\ , & \text{dacă } n \text{ este par}\,, \\ 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot n\ , & \text{dacă } n \text{ este impar}\,. \end{cases}$$

5.5.27 Teoremă. (Formula lui Taylor cu restul sub formă de integrală). *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, I – interval, admite derivate până la ordinul $n+1, n \in \mathbb{N}$, continue pe I şi dacă $x_0,\ x \in I$, atunci avem egalitatea*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1\,!}\, f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2\,!}\, f''(x_0) + \ldots + \\ +\ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{n\,!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, d\,t. \end{aligned} \tag{5.5.17}$$

Demonstraţie. Aplicăm formula integrării prin părţi generalizată (5.5.12) pentru funcţiile $F(t) = f'(t)\,,\ G(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n\,!}\,,\ t \in [x_0, x] \subset I$ şi obţinem

$$\int\limits_{x_0}^{x} F^{(n)}(t)G(t)\,dt = F^{(n-1)}(t)\,G(t)\,\Big|_{x_0}^{x} - F^{(n-2)}(t)\,G'(t)\,\Big|_{x_0}^{x} + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}F(t)\ \ G^{(n-1)}(t)\Big|_{x_0}^{x} + (-1)^n \int\limits_{x_0}^{x} F(t)\,G^{(n)}(t)\,d\,t,$$

adică

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n\,!}\, f^{(n+1)}\,dt = \frac{(x-t)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(t)\,\Big|_{x_0}^{x} + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)\,!}\, f^{(n-1)}(t)\,\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+ \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)\,!}\, f^{(n-2)}(t)\,\Big|_{x_0}^{x} + \ldots + \frac{x-t}{1\,!}\, f'\,(t)\,\Big|_{x_0}^{x} + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,d\,t =$$

$$= f(x) - f(x_0) - \frac{(x-x_0)}{1\,!}\, f'(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2\,!}\, f''(x_0) - \ldots - \frac{(x-x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_0).$$

De aici rezultă imediat relaţia cerută (5.5.17).

5.5.28 Teoremă. (prima formulă de schimbare de variabilă pentru integrala Riemann). *Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, $a,b \in \mathbb{R}$ şi funcţiile $u : [a, b] \to I, f : I \to \mathbb{R}$ îndeplinesc condiţiile*

1^0. *u este continuă pe $[a, b]$ şi are derivata u' continuă pe $[a, b]$;*

2^0. *f este continuă pe I, atunci are loc egalitatea*

$$\int_a^b f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt. \tag{5.5.18}$$

Demonstraţie. Funcţia f, continuă, admite primitive pe I. Dacă $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a sa atunci avem, cu formula lui Newton – Leibniz

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt = F(u(b)) - F(u(a)).$$

Funcţia compusă g:$[a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = F(u(x))$, este derivabilă, fiind compusa a două funcţii derivabile, şi atunci

$$g'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)\,, \quad x \in [a, b].$$

Aplicând din nou formula lui Newton – Leibniz

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a) = F(u(b)) - F(u(a)),$$

rezultă relaţia (5.5.18).

5.5.29 Exemplu. Să se calculeze $\int\limits_0^1 \dfrac{x^5}{1+x^6}\, dx$.

Fie $u(x) = 1 + x^6$, $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$, evident derivabilă şi $u'(x) = 6x^5$ este continuă. Atunci avem

$$\int_0^1 \frac{x^5}{1+x^6}\, dx = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)} = \ln(x) = t = \frac{1}{6} \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{dt}{t} = \frac{1}{6} \ln|t|\Big|_1^2 = \frac{1}{6} \ln 2.$$

5.5.30 Teoremă. (a doua formulă de schimbare de variabilă). *Fie funcţiile $u : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile*

1^0. *funcţia u este bijectivă şi derivabilă împreună cu inversa sa $u^{-1} : [a, b] \to [\alpha, \beta]$,*

2^0. *u' şi $(u^{-1})'$ sunt continue pe $[\alpha, \beta]$ respectiv $[a, b]$;*

3^0. *funcţia f este continuă pe $[a, b]$.*

În aceste condiţii are loc egalitatea

$$\int_\alpha^\beta f(u(x))\, dx = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t) \cdot (u^{-1})'(t)\, dt. \tag{5.5.19}$$

Demonstraţie. În ipotezele noastre, funcţia compusă $f \circ u$ este continuă şi deci admite primitive pe $[\alpha, \beta]$. Dacă F:$[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ este o primitivă, cu formula lui Newton – Leibniz, obţinem

$$\int_\alpha^\beta f(u(x))\, dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Însă funcţia $F \circ u^{-1}$ este o primitivă a funcţiei $f \cdot (u^{-1})'$ pe $[a, b]$, deoarece

$$\begin{aligned}(F \circ u^{-1})'(t) &= F'(u^{-1}(t)) \cdot (u^{-1})'(t) = (f \circ u)(u^{-1}(t)) \cdot (u^{-1})'(t) = \\ &= f(u(u^{-1}(t))) \cdot (u^{-1})'(t) = f(t) \cdot (u^{-1})'(t).\end{aligned}$$

Aplicăm din nou formula lui Newton – Leibniz

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)\cdot (u^{-1})'(t) = (F\circ u^{-1})(u(\beta)) - (F\circ u^{-1})(u(\alpha)) =$$

$$= F(u^{-1}(u(\beta))) - F(u^{-1}(u(\alpha))) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(x))\,dx.$$

5.5.31 Exemplu. Să se calculeze $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Pentru calculul acestei integrale, o vom descompune în două integrale astfel

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \tag{5.5.20}$$

La integrala a doua vom pune $x=\pi-t$ şi atunci pentru $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ vom avea $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ şi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

Acum din (5.5.20) obţinem

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt,$$

iar de aici, cu schimbarea de variabilă $\cos t = u, t=\arccos u, u\in[0,1]$ când $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $-\sin t dt = du$, se găseşte

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \pi\int_1^0 \frac{-du}{1+u^2} = \pi\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \\ &= \pi\mathrm{arctg}u\big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

5.5.32. Observaţie. Teoremele 5.5.28 şi 5.5.30 se pot unifica într-o singură formulă de schimbare de variabilă cu cele trei variante de aplicare prezentate la Observaţia 5.5.21, doar că în cazul acesta odată cu schimbările formale de variabilă se schimbă şi limitele de integrare prin înlocuirea $u(x) := t$ sau $x := u(t)$.

5.5.33 Exemplu. Să se calculeze $\int\limits_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx$.

Cu substituţia $e^{3x}=t$ adică $x :== \frac{1}{3}\ln t, dx := \frac{1}{3t}dt$ şi dacă $x=0$, atunci $t=1$, iar dacă $x=1$, atunci $t=e^3$. Integrala devine

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \int_1^{e^3} \frac{t}{1+t}\cdot\frac{1}{3t}dt = \frac{1}{3}\int_1^{e^3}\frac{dt}{1+t} = \frac{1}{3}\ln|1+t|\Big|_1^{e^3} = \frac{1}{3}\ln\frac{1+e^3}{2}.$$

5.5.34 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x(1+\mathrm{tg}x)}dx.$$

Vom face substituţia $\mathrm{tg}x := t$ sau $x := \mathrm{arctg}t,\ dx := \dfrac{1}{1+t^2}dt$. Noile limite de integrare vor fi 0 şi 1, astfel că integrala va fi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x(1+\mathrm{tg}x)}dx. = \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = t\,\Big|_0^1 - \ln(1+t)\,\Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

5.6 Integrarea funcţiilor raţionale şi a altor clase de funcţii

Vom vedea în acest paragraf că primitivele funcţiilor raţionale nu sunt întotdeauna funcţii raţionale dar sunt funcţii elementare care se exprimă ca o sumă de funcţii raţionale şi de funcţii logaritmice sau funcţii arctangente.

5.6.1 Definiţie. (Funcţie raţională simplă). O funcţie raţională f se numeşte **funcţie raţională simplă** sau **fracţie simplă**) dacă are una din următoarele forme:

I. $f(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\ ,\ a_i \in \mathbb{R}\ ,\ i = \overline{0,n}$;

II. $f(x) := \dfrac{A}{(x-a)^n}$unde $n \in \mathbb{N}$, $a,\ A \in \mathbb{R}$;

III.$f(x) := \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $A,\ B,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ şi $b^2 - 4ac < 0$.

Se arată, în teorema următoare, că orice altă funcţie raţională $f(x) := \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, este o combinaţie liniară de funcţii raţionale simple.

5.6.2 Teoremă. (Teorema de descompunere a funcţiilor raţionale în funcţii raţionale simple). *Fie funcţia raţională* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *unde* P *şi* Q *sunt polinoame cu coeficienţi reali, prime între ele şi* $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. *Dacă* Q *are descompunerea în factori ireductibili*

$$Q(x) = (x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_k)^{n_k}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{m_1}\ldots(a_sx^2+b_sx+c_s)^{m/s} \tag{5.6.1}$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *sunt rădăcinile reale ale lui* Q, *iar* $\Delta_i = b_i^2 - 4a_ic_i < 0$, *pentru* $i = 1, 2, \ldots, s$ şi $n_1, n_2, \ldots, n_k, m_1, m_2, \ldots, m_s \in \mathbb{N}^*$ *aşa ca*

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k + 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_s) = \mathrm{grad}\, Q,$$

atunci există un polinom cu coeficienţi reali $p(x)$, *şi constantele reale* $A_i^j,\ i = \overline{1,k};\ j = \overline{1,n_i}\ ;\ B_p^l,\ C_p^l$, $p = \overline{1,s}\ ;\ l = \overline{1,m}$ *astfel încât f să se scrie în mod unic sub forma*

$$f(x) = p(x) + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{A_i^1}{x-x_i} + \frac{A_i^2}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{A_i^{n_i}}{(x-x_i)^{n_i}}\right) +$$

$$+\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{B_p^1x + C_p^1}{a_px^2+b_px+c_p} + \frac{B_p^2x + C_p^2}{(a_px^2+b_px+c_p)^2} + \ldots + \frac{B_p^{m_p}x + c_p^{m_p}}{(a_px^2+b_px+c_p)^{m_p}}\right), \tag{5.6.2}$$

pentru orice $x \in D$.

Renunţăm la demonstraţia teoremei, datorită lungimii ei.

Din (5.6.2) se deduce că pentru a integra funcţia raţională f trebuie să integrăm un polinom şi o sumă de funcţii raţionale de tipul II şi III. Dacă polinomul p este

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\ ,\ \ a_i \in \mathbb{R}; i = \overline{0,n},$$

atunci

$$\int p(x)\,dx = \frac{a_0}{n+1}\,x^{n+1} + \frac{a_1}{n}\,x^n + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2}\,x^2 + a_nx + C,$$

dacă $x \in I$ − interval inclus în D.

5.6.3 Observaţie. Dacă în $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, gradul polinomului P este mai mic decât gradul lui Q, atunci polinomul p din (5.6.2) este identic nul. Dacă funcţia raţională simplă care intră în descompunerea (5.6.2) are forma II, adică $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$, $x \in I \subset D$, atunci pentru $n = 1$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln\ |\, x-a\,| + C,$$

iar dacă $n > 1$, atunci

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\, d\,x = A \int (x-a)^{-n}\, d\,x = A \cdot \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{1-n}\ \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

Dacă funcţia raţională simplă este de tipul III, atunci

$$f(x) = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},\ x \in I \subset D\,,\ \ \Delta = b^2 - 4ac < 0,$$

şi pentru a găsi primitiva sa vom scrie

$$ax^2+bx+c = a\ \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\ \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \alpha^2\right]\ ,\ \text{unde}\ \ \alpha = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$\int f(x)\, d\,x = \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\, d\,x = \int \frac{Ax+B}{a^n\ \left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \alpha^2\right]^n}\, d\,x.$$

Dacă facem substituţia $x + \dfrac{b}{2a} := t$, obţinem integrala

$$\int \frac{A\left(t-\dfrac{b}{2a}\right)+B}{a^n(t^2+\alpha^2)^n}\, dt = \frac{A}{a^n} \int \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}\, dt + \frac{1}{a^n}\left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^n}\, dt.$$

Aşadar, a rămas să calculăm integralele de forma

$$\int \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}\, d\,t\ ;\ \ \int \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^n}\, d\,t\ ,\ \ t \in\mathbb{R} \tag{5.6.3}$$

Pentru aceste două integrale avem două cazuri, $n = 1$ şi $n > 1$. Pentru $n = 1$ se obţine imediat

$$\int \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+\alpha^2)'}{t^2+\alpha^2}\, dt = \frac{1}{2}\ \ln{(t^2+\alpha^2)} + C\ ,\ \ t \in \mathbb{R},$$

şi de asemenea

$$\int \frac{1}{t^2+\alpha^2}\, d\,t = \frac{1}{\alpha}\text{arctg}\ \frac{t}{\alpha} + C\ ,\ \ \ t\in\mathbb{R}.$$

Dacă $n > 1$, prima integrală (5.6.3) devine, pentru $t^2 + \alpha^2 = u$

$$\int \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+\alpha^2)'}{(t^2+\alpha^2)^n}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^n} = \frac{1}{2}\ \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C=$$

$$= \frac{1}{2(1-n)}\ \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}} + C\ ,\ \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Cea de-a doua integrală (5.6.3) pentru $n > 1$, se calculează cu ajutorul unei formule de recurenţă. Dacă notăm $I_n := \int \dfrac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n}$, atunci integrând prin părţi pe

$$I_{n-1} := \int \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}}\,dt = \int t'\,\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}}\,dt,$$

obţinem

$$I_{n-1} = \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}} - \int t\,\frac{-(n-1)(t^2+\alpha^2)^{n-2}\cdot 2t}{(t^2+\alpha^2)^{2n-2}}\,dt = \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}} +$$
$$+2(n-1)\int \frac{t^2}{(t^2+\alpha^2)^n}\,dt = \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{t^2+\alpha^2-\alpha^2}{(t^2+\alpha^2)^n}\,dt=$$
$$= \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}} + 2(n-1)\,I_{n-1} - 2(n-1)\,\alpha^2\,I_n.$$

Explicităm în raport cu I_n şi găsim relaţia de recurenţă

$$I_n = \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{t}{2(n-1)(t^2+\alpha^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right],\ n = 2, 3, \ldots, \tag{5.6.4}$$

iar

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+\alpha^2}\,d\,t = \frac{1}{\alpha}\,\text{arctg}\,\frac{t}{\alpha} + C\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.6.4 Exemplu. Să se calculeze

$$\int \frac{3}{2x^2+4x+7}\,d\,x.$$

Avem $\Delta = 16 - 56 = -40 < 0$, aşa că avem o funcţie raţională simplă de tipul III cu n =1. Putem scrie

$$\int \frac{3}{2x^2+4x+7}dx = 3\int \frac{1}{2\left[x^2+2x+1+\dfrac{7}{2}-1\right]}dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+\dfrac{5}{2}} = \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2+\dfrac{5}{2}} = J$$

Acum putem face substituţia $z := x+1, dz := dx$ şi obţinem

$$J = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\text{arctg}\frac{z}{\sqrt{\dfrac{5}{2}}} + C = \frac{3}{\sqrt{10}}\text{arctg}\frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{5}} + C, x \in \mathbb{R}.$$

5.6.5 Exemplu. Să se calculeze

$$\int \frac{x+1}{x^3+x}dx, x > 0.$$

Descompunem funcţia raţională în funcţii raţionale simple cu ajutorul relaţiei (5.6.2)

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Vom determina constantele A, B, C prin identificarea celor doi membri ai egalităţii

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}.$$

Deducem că $A+B = 0, C = 1, A = 1$ şi astfel $A = 1, B = -1, C = 1$. Vom avea

$$\int \frac{x+1}{x^3+x}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{arctg}x + C, x > 0.$$

5.6.6 Exemplu. Să se calculeze

$$\int \frac{2x^2+2x+12}{(x-1)(x^2-2x+5)^2}dx, x \in I, \tag{5.6.5}$$

I fiind un interval din $\mathbb{R}$ care nu conţine punctul $x = 1$.

Vom descompune, conform Teoremei 5.6.2 funcţia de sub integrală în funcţii raţionale simple

$$\frac{2x^2+2x+12}{(x-1)(x^2-2x+5)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} + \frac{Dx+E}{(x^2-2x+5)^2}.$$

Vom determina constantele A, B, C, D, E prin identificarea numărătorilor din cei doi membri, după aducerea la acelaşi numitor

$$\frac{2x^2+2x+12}{(x-1)(x^2-2x+5)^2} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+5)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2-2x+5) + (Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)^2}.$$

Se obţine sistemul liniar

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -4A - 3B + C = 0, \\ 14A + 7B - 3C + D = 2, \\ -20A - 5B + 7C - D + E = 2, \\ 25A - 5C + E = 12. \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este $A = 1, B = -1, C = 1, D = -2, E = 8$.

Funcţia raţională de sub semnul integrală se va descompune astfel:

$$\frac{2x^2+2x+12}{(x-1)(x^2-2x+5)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2-2x+5} - \frac{2x-8}{(x^2-2x+5)^2},$$

şi atunci

$$\int \frac{2x^2+2x+12}{(x-1)(x^2-2x+5)^2}dx = \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{x-1}{x^2-2x+5}dx - \int \frac{2x-8}{(x^2-2x+5)^2}dx =$$

$$= \ln|x-1| - J_1 - J_2 \tag{5.6.6}$$

Dacă facem în J_1 şi J_2 substituţia $x - 1 := t, x := t + 1, dx := dt,\ x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 = t^2 + 4$, atunci

$$J_1 := \int \frac{t}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+4)'}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+4) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right),$$

$$J_2 := \int \frac{2(t+1)-8}{(t^2+4)^2}dt = \int \frac{2t}{(t^2+4)^2}dt - 6\int \frac{1}{(t^2+4)^2}dt = \int \frac{(t^2+4)'}{(t^2+4)^2}dt - 6I_2 =$$

$$= -\frac{1}{t^2+4} - 6I_2. \tag{5.6.7}$$

Integrala

$$I_2 := \int \frac{1}{(t^2+4)^2}dt, \tag{5.6.8}$$

se calculează cu relaţia de recurenţă (5.6.4) pentru $n = 2$, sau se calculează prin părţi integrala

$$I_1 := \int \frac{1}{(t^2+4)}dt = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2}.$$

Se obţine

$$I_2 = \frac{1}{4}\left[\frac{t}{2(t^2+4)} + \frac{1}{4}\text{arctg}\frac{t}{2}\right].$$

Acum integrala J_2 devine

$$J_2 = -\frac{1}{t^2+4} - \frac{3}{4}\frac{t}{t^2+4} - \frac{3}{8}\text{arctg}\frac{t}{2}.$$

Înlocuind $t := x-1$ obţinem expresia finală pentru integrala (5.6.6)

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-1)(x^2-2x+5)^2}dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{x^2-2x+5} -$$

$$-\frac{3}{4}\frac{x-1}{x^2-2x+5} - \frac{3}{8}\text{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

5.6.7 Observaţie. (**Un procedeu pentru determinarea coeficienţilor din descompunerea unei funcţii raţionale**). Să presupunem că

$$Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$$

şi avem descompunerea

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, x \in I \tag{5.6.9}$$

unde $x = a$ este rădăcină multiplă de ordinul k al numitorului $Q(x)$ şi deci $Q_1(a) \neq 0$. Pentru determinarea lui A_k, înmulţim în ambii membri egalitatea (5.6.9) cu $(x-a)^k$ şi obţinem

$$(x-a)^k f(x) = \frac{P(x)}{Q_1(x)} = A_k + A_{k-1}(x-a) + \ldots + A_1(x-a)^{k-1} + (x-a)^k\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

De aici obţinem

$$A_k = \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(a)}{Q_1(a)}. \tag{5.6.10}$$

Pentru a determina pe A_{k-1}, termenul $\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$din (5.6.9), cu A_k determinat cu relaţia (5.6.10), se trece în membrul stâng şi efectuându-se operaţiile, găsim

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} - \frac{A_k}{(x-a)^k} = \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Membrul stâng se scrie, evident

$$\frac{(x-a)P_2(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} = \frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{5.6.11}$$

unde P_2 este un alt polinom. Acum, pentru determinarea luiA_{k-1}, repetăm acelaşi procedeu, înmulţim în ambii membri relaţia (5.6.11) cu $(x-a)^{k-1}$şi apoi facem $x = a$ (sau $x \to a$). Se continuă procedeul până când se obţine şi coeficientul A_1. Într-un mod asemănător se determină coeficienţii B_i^jşi C_i^jdin descompunerea (5.6.2).

5.6.8 Exemplu. Să se calculeze

$$\int \frac{x^2+3x+1}{(x-2)^2(x^2+4x+8)}dx, x \in [3,+\infty). \tag{5.6.12}$$

Avem descompunerea în fracţii simple

$$\frac{x^2+5x+1}{(x-2)^2(x^2+4x+8)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+8}. \tag{5.6.13}$$

Vom determina coeficienţii $A,\ B,\ C,\ D \in \mathbb{R}$ utilizând observaţia 5.6.7. Întîi pentru determinarea lui B, înmulţim (5.6.13) în ambii membri cu $(x-2)^2$ şi apoi facem $x = 2$.

$$B = \left.\frac{x^2+5x+1}{x^2+4x+8}\right|_{x=2} = \frac{3}{4}.$$

În continuare, scriem relaţia 5.6.13 în felul următor

$$\frac{x^2+5x+1}{(x-2)^2(x^2+4x+8)} - \frac{3}{4(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+8}.$$

Efectuând calculele în membrul stâng, obţinem

$$\frac{x^2+8x-20}{4(x-2)^2(x^2+4x+8)} = \frac{(x-2)(x+10)}{4(x-2)^2(x^2+4x+8)} = \frac{x+10}{4(x-2)^2(x^2+4x+8)}$$

$$\frac{x+10}{4(x-2)^2(x^2+4x+8)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+8} \tag{5.6.14}$$

Acum înmulţim ambii membri ai acestei egalitaţii cu $x-2$ şi apoi vom face $x = 2$. Găsim

$$A = \left.\frac{x+10}{4(x^2+4x+8)}\right|_{x=2} = \frac{3}{20}.$$

Cu A determinat, relaţia (5.6.14) se scrie

$$\frac{x+10}{4(x-2)(x^2+4x+8)} - \frac{3}{20(x-2)} = \frac{Cx+D}{x^2+4x+8}$$

sau efectuând calculele

$$-\frac{3x+39}{20(x^2+4x+8)} = \frac{Cx+D}{x^2+4x+8}.$$

De aici se obţine imediat

$$C = -\frac{3}{20}, D = -\frac{13}{20}. \tag{5.6.15}$$

Revenind la relaţia (5.6.13), în care înlocuim valorile găsite, avem

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+5x+1}{(x-2)^2(x^2+4x+8)}dx &= \frac{3}{20}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{1}{2}\int\frac{3x+13}{(x+2)^2+4}dx = \\ &= \frac{3}{20}\ln(x-2) - \frac{3}{4}\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{2}\int\frac{3(x+2)}{(x+2)^2+4}dx + \frac{7}{20}\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}\end{aligned}$$

În final, am obţinut pentru orice $x \in [3, +\infty[$

$$\int \frac{x^2+5x+1}{(x-2)^2(x^2+4x+8)}dx = \frac{3}{20}\ln(x-2) - -\frac{3}{4(x-2)} - \frac{3}{40}\ln(x^2+4x+8) - \frac{7}{40}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

În cele ce urmează vom prezenta câteva clase de funcţii a căror integrare se reduce printr-o schimbare de variabilă convenabilă la integrarea unei funcţii raţionale (la o integrală raţională). Asemenea integrale le vom numi **integrale reductibile la integrale raţionale.**

5.6.9 Observaţie. Integralele de forma

$$\int_a^b R(u(x))u'(x)dx, \tag{5.6.16}$$

unde $R(t)$ este o funcţie raţională iar $u(x)$ este o funcţie oarecare $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu derivata continuă pe $[a, b]$, sunt integrale evident reductibile la integrale raţionale prin schimbarea de variabilă $u(x) = t$. Integralele de forma

$$\int_a^b R(u(x))dx, \tag{5.6.17}$$

nu sunt însă, în general, reductibile la integrale raţionale chiar dacă $R(t)$ este funcţie raţională (excepţie cazul când $u(x)$ este o funcţie raţională). Există însă câteva alegeri pentru $u(x)$ aşa ca integrala (5.6.17) să fie reductibilă la una raţională.

5.6.10 Teoremă. *Integralele de forma*

$$\int_a^b R(e^{\alpha x})dx \tag{5.6.18}$$

unde $R(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$ *este o funcţie raţională,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, aşa ca pentru orice* $x \in [a, b]$ *numitorul său* $Q(e^{\alpha x}) \neq 0$*, se reduc la integrale raţionale.*

Într-adevăr, cu substituţia $e^{\alpha x} := t$ sau $x := \dfrac{1}{\alpha} \ln t, dx := \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{t}dt$, este clar că $t \in [e^{\alpha a}, e^{\alpha b}]$ pentru $x \in [a, b]$ şi integrala (5.6.18) devine

$$\int_{e^{\alpha a}}^{e^{\alpha b}} R(t)\frac{1}{\alpha t}dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)dt,$$

unde $R_1(t)$ este o altă funcţie raţională.

5.6.11 Teoremă. *Integralele trigonometrice de forma*

$$\int_a^b R(\sin x, \cos x)dx, x \in [a, b] \subset]-\pi, \pi[= I \tag{5.6.19}$$

unde $R(u, v)$ *este o funcţie raţională de două variabile, sunt reductibile la integrale raţionale cu substituţia* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} := t$*, adică* $x := u(t) = 2\operatorname{arctg} t$.

Demonstraţie. Este clar că dacă $x \in I$, atunci $\dfrac{x}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ şi funcţia $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ este strict crescătoare şi inversabilă. Utilizând formulele

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{5.6.20}$$

$$dx = u'(t)dt = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

se obţine

$$\int_a^b R(\sin x, \cos x)dx = \int_{t_1}^{t_2} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)dt,$$

unde $R_1(t)$ este o altă funcţie raţională de variabilăt pe intervalul $[t_1, t_2]$, cu $t_1 = tg\dfrac{a}{2}$, $t_2 = tg\dfrac{b}{2}$.

5.6.12 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}dx.$$

Cu substituţia $\text{tg}\dfrac{x}{2} = t$, $x = 2\text{arctg}t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$, utilizând formulele (5.6.20) obţinem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}dx = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = 2\int_0^1 \frac{dt}{2t+2} = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln(t+1)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

5.6.13 Observaţie. Uneori pentru calculul integralelor (5.6.19) schimbarea $tg\dfrac{x}{2} = t$ duce la calcule complicate şi atunci există încă trei cazuri posibile de reducere a integralei la una raţională.

1^0. Dacă funcţia raţională $R(\sin x, \cos x)$ satisface relaţia

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x), x \in [a,b] \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tag{5.6.21}$$

atunci înlocuirea $tgx := t$ sau $x := arctgt$, ne duce la o integrală raţională. Într-adevăr, dacă $R(u,v)$ este pară simultan în raport cu ambele variabile, putem scrie $R(u,v) = R\left(\dfrac{u}{v}\cdot v, v\right) = R_1\left(\dfrac{u}{v}, v\right)$, unde R_1 este o altă funcţie raţională în argumentele sale. Apoi

$$R(-u,-v) = R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R(u,v) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

deci R_1 este pară în raport cu v şi deci putem scrie $R(u,v) = R_1\left(\dfrac{u}{v}, v\right) = R_2\left(\dfrac{u}{v}, v^2\right)$, unde R_2 este o altă funcţie raţională. Integrala va fi atunci

$$\begin{aligned}\int_a^b R(\sin x, \cos x)dx &= \int_a^b R_2(tgx, \cos^2 x)dx = \\ &= \int_{tga}^{tgb} R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt = \int_{tga}^{tgb} R_3(t)dt,\end{aligned}$$

unde R_3 este o nouă funcţie raţională.

5.6.14 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}.$$

Funcţia de sub semnul integral este simultan pară în raport cu $\sin x$ şi $\cos x$, adică satisface (5.6.21). Deci cu înlocuirea $\text{tg}x := t$,$x := \text{arctg}t$, $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$ obţinem

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1\right)dt =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\frac{1}{t^3} - -\frac{2}{t} + t\right)\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{9\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{27}.$$

2^0. Dacă funcţia $R(u,v) = R(\sin x, \cos x)$ este impară în raport cu $u = \sin x$, adică

$$R(-u,v) = -R(u,v), \tag{5.6.22}$$

atunci înlocuirea $\cos x := t$ sau $x := \arccos t$, reduce integrala (5.6.19) la o integrală raţională. Justificarea este imediată deoarece din relaţia (5.6.22) rezultă că funcţia $\frac{R(u,v)}{u}$ este pară în raport cu u deci ea se scrie sub forma $\dfrac{R(u,v)}{u} = R_1(u^2, v)$, adică $R(u,v) = R_1(u^2,v)\cdot u$, unde R_1 este o altă funcţie raţională. Deci

$$\begin{aligned}\int_a^b R(\sin x, \cos x)dx &= \int_a^b R_1(\sin^2 x, \cos x)\cdot \sin x dx = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} R_1(1-t^2, t)(-dt) = \int_{t_1}^{t_2} R_2(t)dt\end{aligned}$$

unde R_2 este o funcţie iar $t_1 = \cos a, t_2 = \cos b$.

5.6.15 Exemplu. Să se calculeze $\int_0^\pi \sin^5 x \cos^2 x dx$.

Funcţia de sub semnul integrală este impară în raport cu sin x, astfel că înlocuim

$$\cos x := t, -\sin x dx = dt, t_1 = \cos 0 = 1, t_2 = \cos \pi = -1.$$

Obţinem

$$\int_0^\pi \sin^4 x \cos^2 x \sin x dx = -\int_{-1}^1 (1-t^2)^2\cdot t^2 dt = \int_{-1}^1 (t^6 - 2t^4 + t^2)dt =$$

$$= \left(\frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^1 = 2\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{105}.$$

3^0. Dacă în integrala (5.6.19) funcţia de sub integrală $R(u,v) = R(\sin x, \cos x)$ este impară în raport cu $v = \cos x$, adică

$$R(u, -v) = -R(u,v), \tag{5.6.23}$$

atunci cu substituţia $\sin x := t$, integrala se reduce la una raţională. Într-adevăr, din (5.6.23) rezultă că $\dfrac{R(u,v)}{v}$ este pară în raport cu v, deci $\dfrac{R(u,v)}{v} = R_1(u, v^2)$, unde R_1 este o funcţie raţională. Atunci $R(u,v) = R_1(u,v^2)\cdot v$ şi avem

$$\begin{aligned}\int_a^b R(\sin x, \cos x)dx &= \int_a^b R_1(\sin x, \cos^2 x)\cdot \cos x dx = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} R_1(t, 1-t^2)\cdot (dt) = \int_{t_1}^{t_2} R_2(t)dt,\end{aligned}$$

unde $R_2(t)$ este o funcţie raţională.

5.6.16 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}.$$

Funcţia este impară în raport cu cos x şi atunci înlocuirea $\sin x := t$, $\cos x dx = dt, t_1 = \sin 0 = 0$, $t_2 = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, conduce la

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

5.6.17 Teoremă. *Integralele de forma*

$$\int_\alpha^\beta R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx, \tag{5.6.24}$$

unde $R(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ *este o funcţie raţională de două variabile, sunt reductibile la integrale raţionale, dacă se face schimbarea de variabile*

$$\frac{ax+b}{cx+d} := t^n \text{sau} \quad x := -\frac{dt^n - b}{ct^n - a} = u(t). \tag{5.6.25}$$

Desigur, funcţia de sub integrală trebuie să satisfacă câteva condiţii minime de existenţă:

a) $Q\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) \neq 0$ pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$;

b) $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geqslant 0$ în $[\alpha, \beta]$ dacă n este număr par;

c) $ad \neq bc$, deoarece în caz contrar funcţia $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ se reduce la o constantă şi deci funcţia de sub integrală nu mai este o funcţie iraţională.

Cu acestea, integrala (5.6.24) devine

$$\int_\alpha^\beta R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int_{t_1}^{t_2} R(u(t),t)\cdot u'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)dt,$$

unde $R_1(t)$ este clar o funcţie raţională, iar $t_1 = \sqrt[n]{\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}}; t_2 = \sqrt[n]{\dfrac{a\beta+b}{c\beta+d}}$.

5.6.18 Să se calculeze

$$I := \int_{-7/9}^{7/9} \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}dx. \tag{5.6.26}$$

Avem o integrală de forma (5.6.24). Pentru a o reduce la o integrală raţională vom face schimbarea de variabilă (5.6.25), care în acest caz este $\dfrac{x-1}{x+1} = t^3$. De aici obţinem

$$x := \frac{1+t^3}{1-t^3}, dx := \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}dt.$$

Integrala (5.6.26) devine, cu noile limite de integrare,

$$\begin{aligned} I &:= e\int_{-2}^{-1/2}\frac{t^3}{1-t^3}dt = -3\int_{-2}^{-1/2}\frac{t^3-1+1}{t^3-1}dt = \\ &= -3\int_{-2}^{-1/2}dt - 3\int_{-2}^{-1/2}\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)}dt. \end{aligned}$$

Dacă descompunem în funcţii raţionale simple

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{t+2}{t^2+t+1},$$

$$I = -3t - 3t|_{-2}^{-\frac{1}{2}} - \int_{-2}^{-1/2}\frac{dt}{t-1} + \int_{-2}^{-1/2}\frac{t+2}{t^2+t+1}dt = -\frac{9}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\frac{7}{4} + \int_{-3/2}^{0}\frac{udu}{u^2+3/4} +$$

$$\begin{aligned} +\frac{3}{2}\int_{-3/2}^{0}\frac{du}{u^2+3/4} &= -\frac{9}{2} + \ln 2 - \frac{1}{4}\ln\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)\Big|_{-3/2}^{0} \\ +\sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}}\Big|_{-3/2}^{0} &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\ln 7. \end{aligned}$$

5.6.19 Obsevaţie. O integrală de forma

$$J = \int_a^b R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right)dx, \tag{5.6.27}$$

unde $R(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})$ este o funcţie raţională de argumentele sale, iar $m_i, n_i \geqslant 2, i = 1, 2, \ldots, k$ sunt numere naturale, se reduce la o integrală raţională prin schimbarea de variabilă $\frac{ax+b}{cx+d} := t^n$, unde n este cel mai mic multiplu comun al numerelor $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Justificarea este imediată, în ipoteza că funcţia de sub integrală satisface condiţii de existenţă similare condiţiilor $a), b), c)$ de la teorema 2.6.17.

5.6.20 Exemplu. Să se calculeze

$$J := \int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $x+1 := t^6$, $dx := 6t^5dt$, $t_1 = 0, t_2 = 1$, obţinem

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1\frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5dt = 6\int\frac{t^8}{t^2+1}dt = \\ &= 6\int_0^1\frac{t^8+t^6-t^6-t^4+t^4-t^2+t^2-1+1}{t^2+1}dt = \\ &= 6\int_0^1\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \\ &= 6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\mathrm{arctg}t\right)\Big|_0^1 = \end{aligned}$$

$$= 6\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{152}{35}.$$

5.6.21 Teoremă. *Integralele de forma*

$$\int_{\alpha}^{\beta} R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \tag{5.6.28}$$

unde $R(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ *este o funcţie raţională în două variabile, se reduce întotdeauna la o integrală raţională dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

a) $Q\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \neq 0$, *oricare ar fi* $x \in [\alpha, \beta]$;

b) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, *pentru orice* $x \in [\alpha, \beta]$;

c) $a \neq 0$ şi $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$.

Demonstraţie. Vom prezenta **schimbările de variabile ale lui Euler**, însă acestea nu sunt singurele care reduc integrala (5.6.28) la integrale raţionale.

1^0. Dacă $a > 0$ se face înlocuirea

$$\sqrt{ax^2+bx+c} := t - \sqrt{a}x, \tag{5.6.29}$$

care ne conduce la $x := u(t) = \dfrac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}$. Deoarece t este o funcţie continuă de x, înseamnă că dacă x parcurge intervalul $[\alpha, \beta]$ atunci t parcurge intervalul $[t_1, t_2]$ unde t_1 şi t_2 se obţin din (5.6.29) pentru x $=\alpha$, respectiv $x = \beta$. Prin metoda reducerii la absurd se deduce că $b + 2\sqrt{a} \cdot t \neq 0$ pentru orice $t \in [t_1, t_2]$. Atunci integrala (5.6.28) devine

$$\int_{t_1}^{t_2} R(u(t), t - \sqrt{a} \cdot u(t)) \cdot u'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)dt,$$

unde $R_1(t)$ este o funcţie raţională de t, deoarece şi $u(t), u'(t)$ sunt funcţii raţionale de t.

2^0. Dacă $c > 0$ se face schimbarea de variabilă

$$\sqrt{ax^2+bx+c} := tx + \sqrt{c}. \tag{5.6.30}$$

De aici se scoate x şi avem $x = u(t) = \dfrac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, t \in [t_1, t_2]$. Integrala (5.6.28) devine

$$\int_{t_1}^{t_2} R(u(t), tu(t) + \sqrt{c})u'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} R_2(t)dt,$$

unde $R_2(t)$ este o funcţie raţională de t, deoarece R, u şi u' sunt funcţii raţionale.

3^0. Dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, adică trinomul de gradul doi $ax^2 + bx + c$ are rădăcini reale şi distincte x_1, x_2 atunci se face schimbarea de variabile

$$\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x - x_1} := t \quad \text{sau} \quad a(x - x_2) = t^2(x - x_1). \tag{5.6.31}$$

De aici se obţine

$$x = u(t) := \frac{x_1 t^2 - a x_2}{t^2 - a}, \quad t \in [t_1, t_2], \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(x_1 - x_2)t}{t^2 - a},$$

şi integrala (5.6.28) devine

$$\int_{t_1}^{t_2} R\left(u(t), \frac{a(x_1 - x_2)t}{t^2 - a}\right)u'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} R_3(t)dt,$$

unde $R_3(t)$ este o funcţie raţională deoarece R, u şi u' sunt funcţii raţionale.

Aşadar în fiecare caz 1^0, 2^0, 3^0 integralele (5.6.28) se reduc la integrale raţionale.

5.6.22 Observaţie. Schimbările de variabile definite de relaţiile (5.6.29), (5.6.30) şi (5.6.31) se numesc **substituţiile lui Euler**.

5.6.23 Observaţie. Este posibil să avem îndeplinite simultan două sau trei din condiţiile $a > 0$, $c > 0$ şi $b^2 - 4ac > 0$. Atunci se poate efectua oricare din substituţiile (5.6.29), (5.6.30) şi (5.6.31).

5.6.24 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Avem o integrală de forma (5.6.28) cu $a = 1$ şi $c = 1$. Deci putem face sau substituţia (5.6.29) sau substituţia (5.6.30). Să o facem pe (5.6.29)

$$\sqrt{x^2 - x + 1} := t - x, x^2 - x + 1 = t^2 - 2tx + x^2, x := u(t) = \frac{t^2 - 1}{2t - 1},$$

$$dx = u'(t)dt = \frac{2(t^2 - t + 1)}{(2t - 1)^2}dt, t_1 = 1, t_2 = 2.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = 2\int_1^2 \frac{t^2 - t + 1}{t(2t - 1)^2}dt = \int_1^2 \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t - 1} + \frac{3}{(2t - 1)^2}\right) dt =$$

$$= \left[2\ln t - \frac{3}{2}\ln(2t - 1) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t - 1}\right]\Bigg|_1^2 = 1 + 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3.$$

5.6.25 Definiţie. Integralele de forma

$$\int_\alpha^\beta x^m(ax^n + b)^p dx, \tag{5.6.32}$$

unde a, $b \in \mathbb{R}$ iar m, n, p sunt numere raţionale, se numesc **integrale binoame**.

Pentru ca integrala (5.6.32) să aibă sens sunt necesare satisfacerea următoarelor condiţii:

a) $x \geqslant 0$ pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$, dacă unul dintre numitorii lui m sau n este număr natural par;

b) $x \neq 0$ dacă cel puţin unul dintre numerele m şi n este negativ;

c) $ax^n + b \geqslant 0$, oricare ar fi $x \in [\alpha, \beta]$ dacă p are numitorul un număr par şi $ax^n + b \neq 0$ pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$, dacă $p \leqslant 0$.

Matematicianul rus **P. L. Cebîşev** a demonstrat că există numai trei cazuri în care integralele binoame (5.6.32) sunt reductibile la integrale raţionale. Aceste cazuri sunt prezentate în teorema care urmează

5.6.26 Teoremă. *O integrală binoamă (*5.6.32*) se reduce la o integrală raţională în următoarele cazuri:*

1^0. *Dacă p este număr întreg, atunci substituţia*

$$x := u(t) = t^r, \tag{5.6.33}$$

unde $r \in \mathbb{N}^*$, este cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui m şi n, reduce integrala binoamă la o integrală raţională;

2^0. *Dacă $\dfrac{m+1}{n}$ este întreg, atunci substituţia*

$$ax^n + b := t^r, \text{ sau } x := u(t) = \left(\frac{t^r - b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{5.6.34}$$

unde r este numitorul lui p, reduce integrala binoamă la o integrală raţională.

3^0. *Dacă* $\frac{m+1}{n}+p$ *este număr întreg, atunci substituţia*

$$a+bx^{-n}=t^r, \text{sau } \ x:=u(t)=\left(\frac{b}{t^r-a}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{5.6.35}$$

unde r este numitorul lui p, reduce integrala binoamă la o integrală raţională.

Demonstraţie. În cazul 1^0, dacă facem substituţia (5.6.33), integrala binoamă (5.6.32) devine

$$\int_{t_1}^{t_2} t^{mr}(at^{nr}+b)^p rt^{r-1}dt=\int_{t_1}^{t_2} R(t)dt,$$

unde $t_1=\sqrt[r]{\alpha}, t_2=\sqrt[r]{\beta}$, iar $R(t)$ este evident o funcţie raţională de t.

Dacă $p\notin\mathbb{Z}$, dar $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, cu substituţia (2.6.34), integrala binoamă (2.6.32) devine

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{t^r-b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot t^{p\cdot r}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{r}{a}\cdot t^{r-1}\cdot\left(\frac{t^r-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}dt=$$

$$=\frac{r}{n}\cdot\frac{1}{a^{\frac{m+1}{n}}}\int_{t_1}^{t_2} t^{pr+r-1}(t^r-b)^{\frac{m+1}{n}-1}dt=A\int_{t_1}^{t_2} R_1(t)dt,$$

unde A este o constantă iar $R_1\ (t)$ este o funcţie raţională, deoarece $pr+r-1$ şi $\frac{m+1}{n}-1$ sunt numere întregi. În cazul în care nici p, nici $\frac{m+1}{n}$, nu sunt numere întregi, dar $\frac{m+1}{n}+p$ este întreg, cu substituţia (2.6.35), integrala binoamă devine

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{b}{t^r-a}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{b^p\cdot t^{pr}}{(t^r-a)^p}\left(-\frac{r}{n}\right)\cdot b^{\frac{1}{n}}\cdot t^{r-1}(t^r-a)^{-\frac{n+1}{n}}dt=$$

$$=B\int_{t_1}^{t_2} t^{pr+r-1}(t^r-a)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p+1\right)}dr=B\int_{t_1}^{t_2} R_2(t)dt,$$

unde B este o constantă şi $R_2(t)$ este o funcţie raţională deoarece $pr+r-1$ şi $-\left(\frac{m+1}{n}+p+1\right)$ sunt întregi.

5.6.27 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_1^{64}\frac{(\sqrt[6]{x}-1)^2}{\sqrt[6]{x^7}}dx=\int_1^{64} x^{-7/6}(x^{1/6}-1)^2dx.$$

În acest caz avem $m=-\frac{7}{6}, n=\frac{1}{6}, p=2$. Cum $p=2$ este întreg facem schimbarea de variabilă (2.6.33), adică $x:=t^6, t:=\sqrt[4]{x}, dx:=6t^5dt, t_1=1, t_2=2$. Obţinem

$$\int_1^2 t^{-7}(t-1)^2 6t^5dt=6\left(t-2\ln t-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^2=9-12\ln 2.$$

5.6.28 Exemplu. Să se calculeze

$$I_2:=\int_1^4\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4 x^{-1/2}(x^{1/4}+1)^{1/3}dx.$$

Avem $m = -\dfrac{1}{2}, n = \dfrac{1}{4}, p = \dfrac{1}{3}$, deci $p \notin \mathbb{Z}$ dar $\dfrac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$ astfel folosim (2.6.34)

$$x^{1/4} + 1 := t^3, x := (t^3-1)^4, t_1 = \sqrt[3]{2}, t_2 = \sqrt[3]{3}, dx := 12t^2(t^3-1)^3 dt.$$

$$I_2 := 12\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} (t^6 - t^3)dt = \frac{3}{7}(15\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}).$$

5.6.29 Exemplu. Să se calculeze

$$I_3 := \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^0(x^4+1)^{-\frac{1}{4}}dx.$$

Avem $m = 0, n = 4, p = -\dfrac{1}{4}$ şi $p \notin \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$, dar $\dfrac{m+1}{n} + p = 0 \in \mathbb{R}$ şi cu (5.6.35)

$$1 + x^4 := t^4, t := \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}, x := (t^4-1)^{-1/4}, dx := -t^3(t^4-1)^{-5/4}dt, t_1 = \sqrt[4]{17}, t_2 = \sqrt[4]{2}.$$

Integrala devine

$$I_3 = -\int\limits_{\sqrt[4]{17}}^{\sqrt[4]{2}} \left(\frac{t^4}{t^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt = \int\limits_{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt[4]{17}} \frac{t^2}{t^4-1}dt =$$

$$= \int\limits_{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt[4]{17}} \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt[4]{17}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Bigg|_{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt[4]{17}} = \frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt[4]{17}+1)(\sqrt[4]{2}-1)}{(\sqrt[4]{17}-1)(\sqrt[4]{2}+1)} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\sqrt[4]{2} - \operatorname{arctg}\sqrt[4]{17}\right).$$

5.7 Aplicaţii geometrice ale integralei Riemann

Definirea riguroasă a ariilor mulţimilor plane, a lungimii arcelor de curbă, a volumelor unor domenii din spaţiul $\mathbb{R}^3$ şi a ariilor unor suprafeţe din spaţiul $\mathbb{R}^3$, este o problemă complexă ce ţine de teoria măsurii şi nu ne permitem o dezvoltare a acesteia în acest cadru. Vom face aici doar unele consideraţii sumare privind măsura mulţimilor din $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$, consideraţii necesare pentru calculul ariilor unor mulţimi particulare, a ariilor suprafeţelor de rotaţie şi volumele unor corpuri particulare, cum sunt cele de rotaţie.

5.7.1 Aria unei mulţimi plane

5.7.1 Definiţie. (**măsura sau aria unei mulţimi elementare**). Dacă $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$ sunt intervale compacte din $\mathbb{R}$ atunci mulţimea $D = I_1 \times I_2$ se numeşte **dreptunghi** din $\mathbb{R}^2$ cu aria (măsura) Aria$(D) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ iar mulţimea $A \subset \mathbb{R}^2$ care se reprezintă sub forma

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$$

unde D_k sunt dreptunghiuri cu interioarele disjuncte două câte două, se numeşte **mulţime elementară**. Măsura(aria) mulţimii elementare A se defineşte ca

$$m(A) = |A| = \sum_{k=1}^{n} m(D_k),$$

unde $m(D_k)$ este aria (măsura) dreptunghiului D_k.

5.7.2 Definiţie.(**aria sau măsura Jordan a unei mulţimi din** $\mathbb{R}^2$) Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime arbitrară şi notăm cu $\mathcal{E}$ - familia tuturor mulţimilor elementare din $\mathbb{R}^2$. Definim **măsura interioară** a mulţimii A prin

$$m_i(A) = \sup\{m(E); E \in \mathcal{E}, E \subset A\}$$

şi măsura exterioară a mulţimii A, prin

$$m_e(A) = \inf\{m(F); F \in \mathcal{E},\ A \subset F\}$$

şi vom spune că mulţimea A **este măsurabilă Jordan** (**sau că ea are arie**) dacă $m_i(A) = m_e(A) = m(A)$ =Aria$A$ iar numărul $m(A)$ se numeşte **aria** (sau măsura Jordan) a lui A.

În particular, dacă $A \in \mathcal{E}$, atunci $m(A)$ coincide cu aria sau măsura mulţimii elementare A. În plus se arată că $m(A)$ este o funcţie aditivă de mulţime, deci dacă $A, B \in \mathbb{R}^2$ au arie, atunci $A \cup B$ are arie şi

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B), \quad A \cap B = \emptyset.$$

5.7.3 Teoremă. F*ie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime mărginită (deci există un dreptunghi care o conţine). Mulţimea A are arie (este măsurabilă Jordan) dacă şi numai dacă există două şiruri de mulţimi elementare (A_n) şi (B_n) primul crescător iar al doilea descrescător, aşa ca să avem*

$$\begin{array}{ll} a) & A_n \subset A \subset B_n, \ \ \forall n \geq 1; \\ b) & \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} m(B_n) = L \end{array}$$

În acest caz avem $Aria(A) = m(A) = L$ **Demonstraţie.** ($\Rightarrow$) Presupunem că $A \subset \mathbb{R}^2$ are arie şi fie a :=Aria(A), deci

$$a = m_i(A) = \sup\{m(E); E \in \mathcal{E}, E \subset A\}.$$

Din proprietăţile supremului, deducem că există $E_n \in \mathcal{E}$, $E_n \subset A$ aşa ca $m(E_n) \geq a - \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. Analog

$$a = m_e(A) = \inf\{m(F); F \in \mathcal{E}, A \subset F\}$$

şi din proprietăţile infimului rezultă că pentru orice $n \in N^*$ există $F_n \in \mathcal{E}, F_n \supset A$ aşa ca $m(F_n) \leq a + \dfrac{1}{n}$.

Dacă punem $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, $B_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} F_k$, vom avea $A_n \subseteq A \subseteq B_n$,

$$\begin{aligned} m(A_n) &\geq m(E_n) \geq a - \frac{1}{n}, \\ m(B_n) &\leq m(F_n) \leq a + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Deci

$$a - \frac{1}{n} \leq m(A_n) \leq m(B_n) \leq a + \frac{1}{n}.$$

De aici, pentru $n \to \infty$ obţinem

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) = a = \text{Aria}(A).$$

Afirmaţia reciprocă, rezultă imediat.

5.7.4 Observaţie. În mod analog se definesc mulţimile măsurabile Jordan din $\mathbb{R}^3$ (adică mulţimile care au volum)

5.7.5 Teoremă. (**Aria unui trapez curbiliniu**). *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi nenegativă şi trapezul curbiliniu*

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

Atunci T are arie (este măsurabil Jordan) şi

$$\text{Aria}(T) = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.7.1}$$

Demonstraţie. Concluzia teoremei rezultă din Observaţia 5.2.12 (interpretarea geometrică a integralei Riemann) şi din Teorema 5.7.3.

5.7.6 Corolar. (**Aria mulţimii cuprinse între două arce de curbă**). *Fie* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funcţii continue aşa încât*

$$f(x) \geq g(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

Atunci mulţimea

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], g(x) \leq y \leq f(x)\right\},$$

are arie şi avem

$$\mathit{Aria}(A) = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx. \tag{5.7.2}$$

Demonstraţie. Reprezentăm mulţimea A în figura 5.7.1

Fig. 5.7.1

Dacă considerăm trapezele curbilinii

$$\begin{aligned} T_1 \ &: \ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq g(x)\right\}, \\ T_2 \ &: \ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}, \end{aligned}$$

atunci avem că $A = T_2 \backslash T_1$ şi deci

$$\text{Aria } A = \text{Aria}(T_2) - \text{Aria}(T_1) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

5.7.7 Exemplu. Să se calculeze aria mulţimii E mărginite de elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Soluţie. Explicităm pe y din ecuaţia elipsei şi găsim $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, semnul minus corespunde arcului de curbă de sub axa Ox. Vom avea

$$\text{Aria}(E) = 4\int_o^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Fig. 5.7.2

Cu schimbarea de variabilă $x = a\sin t$, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ obţinem

$$\text{Aria}(E) = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\, dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt = 2ab\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

5.7.2 Lungimea unui arc de curbă

5.7.7 Definiţie. O curbă plană este o funcţie continuă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma = (f,g)$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, iar ecuaţiile

$$(\gamma)\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t),\ t \in [a,b], \end{cases}$$

constituie ecuaţiile parametrice (reprezentarea parametrică) ale curbei γ. În particular, dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci graficul său, adică mulţimea punctelor

$$G_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in [a,b]\right\},$$

reprezintă o curbă plană dată explicit prin ecuaţia $y = f(x)$, $x \in [a,b]$. Evident ea poate fi parametrizată prin ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t),\ t \in [a,b] \end{cases}$$

5.7.8 Definiţie.(curbă rectifiabilă, lungimea unei curbe). Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ o curbă plană de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \ t \in [a,b] \end{cases}$$

şi fie $\Delta = (a - t_0, t_1, t_2, ..., t_n = b)$ o diviziune a $[a,b]$. Numărul real

$$V(\gamma, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}, \tag{5.7.3}$$

se numeşte **variaţia curbei** γ **relativ** la diviziunea Δ. Curba γ se spune că este **rectifiabilă** (sau că are lungime) dacă mulţimea $\{V(\gamma, \Delta) : \Delta \in \text{Div}[a,b]\}$ este mărginită.

În acest caz numărul

$$l(\gamma) := \sup \{V(\gamma, \Delta) : \Delta \in \text{Div}[a,b]\}, \tag{5.7.4}$$

se numeşte **lungimea curbei** γ.

5.7.9 Observaţie. Dacă considerăn punctele $M_i\,(f(t_i),\, g(t_i))\,, i = \overline{0,n}$, ce aparţin curbei $\gamma = (f,g) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, atunci variaţia $V(\gamma, \Delta)$ reprezintă perimetrul (lungimea) liniei poligonale inscrisă în curba γ, iar lungimea curbei γ este marginea superioară a perimetrelor tuturor liniilor poligonale ce se pot înscrie în curba γ.

Fig. 5.7.3

5.7.10 Definiţie. (curbă netedă). Spunem că curba plană $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \gamma = (f,g)$ este **netedă** dacă funcţiile $f \cdot g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt derivabile, cu derivatele f' şi g' continue, şi care nu se anulează simultan pe $[a,b]$, adică

$$f^{'^2}(t) + g^{'^2}(t) \neq 0, \forall t \in [a,b]$$

Se verifică uşor că o curbă netedă este o curbă cu variaţia mărginită (adică rectifiabilă).

5.7.11. Teoremă. (**lungimea unei curbe rectifiabile** (**netede**).*Fie curba plană* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, *netedă, cu reprezentarea parametrică*

$$(\gamma) : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in [a,b]. \end{cases}$$

Lungimea curbei este dată de formula

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}dt. \tag{5.7.5}$$

Demonstraţie. Fie $\Delta = (t_0, t_1, ..., t_n) \in$Div$[a,b]$ şi variaţia curbei γ relativ la diviziunea Δ.

$$V(\gamma, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}.$$

În expresia de sub radical, aplicăm formula creşterilor finite pentru f şi g pe fiecare $[t_{i-1}, t_i]$, deci există $\xi_i \in]t_{i-1}, t_i[$ şi $c_i \in]t_{i-1}, t_i[$ aşa ca să avem

$$V(\gamma, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(c_i)} \cdot (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\xi_i)} \cdot (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(c_i)} - \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\xi_i)} \right) (t_i - t_{i-1})) \,.$$

Prima sumă din ultima expresie este suma integrală Riemann pentru funcţia continuă $\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}$, diviziunea Δ şi sistemul de puncte intermediare $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, adică

$$\sigma(F, \Delta, \xi), \ \text{unde } F(t) = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}, t \in [a,b].$$

Putem atunci scrie

$$|V(\gamma,\Delta)-\sigma(F,\Delta,\xi)| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{f'^2(\xi_i)+g'^2(c_i)}-\sqrt{f'^2(\xi_i)+g'^2(\xi_i)}\right]\right|(t_i-t_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{f'^2(\xi_i)+g'^2(c_i)}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{f'^2(\xi_i)+g'^2(\xi_i)}\right|(t_i-t_{i-1}). \qquad (5.7.6)$$

Funcţia $g(u,v) = \sqrt{f'^2(u)+g'^2(v)}$, $g : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe compactul $[a,b]\times[a,b]$, deci este uniform continuă. Înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ aşa încât dacă (u',v'), $(u'',v'') \in [a,b]\times[a,b]$ şi

$$\|(u',v')-(u'',v'')\| = d\left((u',v');(u'',v'')\right) < \delta,$$

adică $|u'-v'| < \delta, |u''-v''| < \delta$, să avem

$$|g(u',v')-g(u'',v'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

În cazul relaţiei (5.7.6) cu $u' = \xi_i, v' = c_i; u'' = \xi_i, v'' = \xi_i$ pentru $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ aşa încât dacă $\nu(\Delta) < \delta$ atunci cum $|\xi_i - c_i| < t_i - t_{i-1} \leq \nu(\Delta) < \delta$, rezultă că

$$|g(\xi_i,c_i)-g(\xi_i;\xi_i)| = \left|\sqrt{f'^2(\xi_i)+g'^2(c_i)}-\sqrt{f'^2(\xi_i)+g'^2(\xi_i)}\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

şi atunci

$$[V(\gamma,\Delta)-\sigma(F,\Delta,\xi)] < \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}(t_i-t_{i-1}) = \varepsilon,\ \ \forall\Delta\in\mathrm{Div}[a,b]. \qquad (5.7.7)$$

Dacă aici în loc de Δ considerăm un şir de diviziuni (Δ_j) cu proprietatea că $\nu(\Delta_j)\to 0$ pentru $j\to\infty$, din faptul că $l(\gamma) = \sup\{V(\gamma,\Delta) : \Delta\in\mathrm{Div}[a,b]\}$, atunci putem alege şirul (Δ_j) aşa ca

$$\sup\{V(\gamma,\Delta) : \Delta\in\mathrm{Div}[a,b]\} = \lim_{j\to\infty} V(\gamma,\Delta) = l(\gamma).$$

Acum relaţia (5.7.7) o scriem

$$|V(\gamma,\Delta_j)-\sigma(F,\Delta_j,\xi)| < \varepsilon, \forall\Delta_j\in\mathrm{Div}[a,b] \text{ cu } \nu(\Delta_j)\to 0.$$

Trecând aici la limită pentru $j\to\infty$ obţinem

$$\left|l(\gamma)-\int_a^b\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}dt\right| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } \varepsilon > 0,$$

adică chiar (5.7.5).

5.7.12 Corolar. *Dacă curba γ este dată explicit prin ecuaţia $y = f(x)$, $x\in[a,b]$, unde f este derivabilă şi cu f' continuă, atunci lungimea ei (adică lungimea graficului lui f) este*

$$l(\gamma) = \int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx. \qquad (5.7.8)$$

5.7.13 Exemplu. Să se calculeze lungimea unui cerc de rază r. Putem presupune că cercul este cu centrul în origine şi deci ecuaţia lui carteziană este $x^2+y^2 = r^2$. Dacă parametrizăm această ecuaţie, putem deduce că ecuaţiile parametrice ale acestui cerc sunt

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, t\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

Cu formula (5.7.5) avem

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = r \int_0^{2\pi} dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

5.7.14 Exemplu. Determinaţi lungimea graficului funcţiei

$$f : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sin x).$$

Utilizăm formula (5.7.8) şi obţinem

$$l(\gamma) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx.$$

Cu substituţia, $\cos x = t, -\sin x dx = dt$, obţinem

$$l(\gamma) = -\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{dt}{\sin^2 x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1 - t^2} = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2 - 1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left|\frac{t-1}{t+1}\right| \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{3}.$$

5.7.15 Corolar. *Dacă curba γ este reprezentată în cordonate polare, $\rho = \rho(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]$, atunci lungimea ei este*

$$l(\gamma) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta. \tag{5.7.9}$$

În adevăr relaţiile dintre coordonatele carteziene x, y şi coordonatele polare ρ, θ sunt

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta, \\ y = \rho(\theta) \sin \theta, \theta \in [\theta_1, \theta_2] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= \rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta \\ y'(\theta) &= \rho'(\theta) \sin \theta = \rho(\theta) \cos \theta \end{aligned}$$

$$x'^2(\theta) + y'^2(\theta) = \rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)$$

Înlocuind în (5.7.5), obţinem (5.7.9).

5.7.3 Volumul uni corp de rotaţie

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi fie $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$. Dacă rotim graficul lui f în jurul axei $0x$ se obţine un corp de rotaţie K_f ca în figura 5.7.4. Are loc următoarea

Figura 5.7.4

5.7.16 Teoremă. *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e continuă şi nenegativă atunci*

a) *Corpul K_f are volum (este o mulţime măsurabilă Jordan din $\mathbb{R}^3$)*

b) *Volumul său este*

$$\text{Vol}(K_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Nu vom face în detaliu demonstraţia teoremei, ci doar vom prezenta idea demonstraţiei.

Dacă $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_n) \in$Div$[a,b]$, corpul nostru se descompune în nişte trunchiuri de con cu înăţimile $x_i - x_{i-1}$ şi razele bazelor $f(x_i)$, respectiv $f(x_{i-1})$. Însumând volumele acestor trunchiuri de con se obţine

$$\sigma_n = \frac{\pi}{3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\left[f^2(x_i) + f^2(x_{i-1}) + f(x_i)f(x_{i-1})\right]. \tag{5.7.11}$$

Dacă alegem un şir de diviziuni (Δ_n) cu $\nu(\Delta_n) \to 0$, cum f^2 e integrabilă Riemann, din (5.7.11) pentru $n \to \infty$ se obţine (5.7.10). Raţionamentul e valabil în ipoteza că un trunchi de con are volum şi el este

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right).$$

5.7.17 Exemplu. Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia

$$f:[0,1] \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = xe^x.$$

Aplicând formula (5.7.10) se obţine

$$\mathrm{Vol}\,(K_f) = \pi\int_0^1 x^2e^{2x}dx = \pi\int_0^1 x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1 - \pi\int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{\pi}{2}e^2 - \pi\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx =$$

$$= \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 + \frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi e^2}{2} + \frac{\pi}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

5.7.18 Corolar. *Dacă se dau funcţiile continue $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $0 \le g(x) \le f(x)$, $x \in [a,b]$, atunci rotind graficele lor în jurul axei $0x$, volumul corpului $K_{f\cdot g}$ de rotaţie obţinut este*

$$\mathrm{Vol}\,(K_{f\cdot g}) = \pi\int_a^b\left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx \tag{5.7.12}$$

5.7.19 Exemplu. Să se calculeze volumul torului, corpul obţinut prin rotaţia unui cerc care nu intersectează axa Ox, în jurul axei Ox. (camera de bicicletă). Fie un cerc, putem putem presupune cu centrul pe axa oy,$C(o,b)$ de rază r, $r < b$, deci de ecuaţie

Figura 5.7.5

$$(x-0)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Explicitând această ecuaţie, avem

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Aplicăm formula (5.7.12) cu $f(x) = b + \sqrt{r^2 - x^2}$ şi $g(x) = b - \sqrt{r^2 - x^2}$ şi obţinem

$$\mathrm{Vol}\,(K_{f,g}) = \pi\int_{-r}^{r}\left[\left(b + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{r^2 - x^2}\right)\right]dx =$$

$$= 4\pi b\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}dx, x = r\sin t,\; t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\mathrm{Vol}\,(K_{f,g}) = 4\pi b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t dt = 4\pi br^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 2\pi br^2\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2r^2b.$$

5.7.20 Exemplu. Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $0x$ a mulţimii mărginite de cercul $x^2+y^2=1$ şi de parabola $y^2=\dfrac{3}{2}x$.

Punctele de intersecţie ale cercului cu parabola sunt $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Pentru a obţine corpul de rotaţie K_f, se roteşte graficul funcţiei

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3}{2}x}, & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right],\\ \sqrt{1-x^2}, x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

Fig. 5.7.6

Acum aplicăm formula (5.7.10)

$$\mathrm{Vol}\,(K_f)=\pi\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}xdx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-x^2\right)dx\right]=\pi\frac{3}{4}x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=\frac{3\pi}{16}+\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)=\frac{3\pi}{16}+\frac{5\pi}{24}=\frac{19\pi}{48}.$$

5.7.4 Aria suprafeţelor de rotaţie

Fie funcţia continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu $f(x)\geq 0, x\in[a,b]$. Rotind graficul lui f în jurul axei $0x$ se obţine corpul de rotaţie K_f din figura 5.7.4. Dorim să calculăm aria laterală a acestui corp, adică aria suprafeţei de rotaţie S_f determinată de funcţia f.

5.7.21 Teoremă. *Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este derivabilă cu derivata f' continuă, atunci*

a) Suprafaţa de rotaţie S_f are arie;

b) Aria sa este dată de

$$\mathrm{Aria}(S_f)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx. \tag{5.7.12}$$

Demonstraţie. Dacă considerăm o diviziune $\Delta=(x_0,x_1,...,x_n)$ a intervalului $[a,b]$ şi pentru fiecare subinterval $[x_{i-1},x_i]$ considerăm trunghiul de con cu înălţimea x_i-x_{i-1} şi razele bazelor $f(x_i), f(x_{i-1})$ respectiv, în ipoteza că un trunchi de con are arie laterală dată de

$$A_l=\pi G\,(R+r)=\pi\left(f(x_i)+f(x_{i-1})\right)\sqrt{\left(x_i-x_{i-1}\right)^2+\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)^2},$$

unde G este generatoarea trunchiului iar R şi r razele bazelor. Suma

$$\sigma_n=\pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)+f(x_{i-1})\right)\sqrt{\left(x_i-x_{i-1}\right)^2+\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)^2},$$

reprezintă suma ariilor laterale ale trunchiurilor de con, deci o valoare aproximativă a ariei suprafeţei S_f. Dacă aplicăm formula creşterilor finite sub radical , obţinem

$$\sigma_n=\pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)+f(x_{i-1})\right)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\left(x_i-x_{i-1}\right),\xi_i\in\left(x_{i-1},x_i\right).$$

Să luăm funcţia $F:[a,b]\to\mathbb{R},\ F(x)=2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ şi suma sa Riemann

$$\sigma\left(F,\Delta,\xi\right)=\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\left(x_i-x_{i-1}\right).$$

Atunci

$$|\sigma_n - \sigma(F,\Delta,\xi)| = \pi \left| \sum_{i=1}^{n} [((f(x_i) - f(\xi_i) + f(x_{i-1}) - f(\xi_i))] \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_i - x_{i-1}) \right| \leq$$

$$\leq \pi \sum_{i=1}^{n} (|f(x_i) - f(\xi_i)| + |f(x_{i-1}) - f(\xi_i)|) \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_i - x_{i-1}).$$

Funcţia f e continuă pe $[x_{i-1}, x_i]$, deci uniform continuă şi deci $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ aşa încât pentru $x^{'}, x^{''} \in [x_{i-1}, x_i]$ cu $|x' - x''| < \delta$, avem $|f(x') - f(x''| < \dfrac{\varepsilon}{2\pi(b-a)}$.

Atunci dacă $\Delta \in$Div$[a,b]$ este aşa ca $\nu(\Delta) < \delta$, obţinem

$$|\sigma_n - \sigma(F,\Delta,\xi)| \leq \pi \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\varepsilon}{2\pi(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2\pi(b-a)} \right] M \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

unde

$$M = \sup_{x\in[a,b]} \sqrt{1+f'^2(x)}$$

(f' e continuă pe un compact deci marginită).

În final

$$|\sigma_n - \sigma(F,\Delta,\xi)| \leq \frac{\varepsilon M}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = M\varepsilon, \ \ \forall \varepsilon > 0.$$

Alegând un şir de diviziuni (Δ_j) cu $\nu(\Delta_j) \to 0$ deducem că

$$\lim_{j\to\infty} (\sigma_n - \sigma(F,\Delta_j,\xi)) = 0.$$

Însă

$$\lim_{j\to\infty} \sigma(F,\Delta_j,\xi) = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)dx}$$

şi $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma_n =$Aria$(S_f)$ $-$aria laterală a suprafaţei de rotaţie. Aşadar am obţinut relaţia (5.7.12)

5.7.22 Exemplu. Să se deducă aria sferei de rază r.
Suprafaţa sferei de rază r se obţine prin rotaţia în jurul lui $0x$ a unui cerc cu centrul în origine de rază r, de ecuaţie $x^2 + y^2 = r^2$, adică prin rotaţia graficului funcţiei

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r]$$

Avem $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ şi cu formula (5.7.12)

$$\text{Aria}\,(S_f) = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx = 2\pi \int_{-r}^{r} rdx = 2\pi r x\Big|_{-r}^{r} = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2.$$

5.7.23 Exemplu. Să se calculeze aria unui elipsoid de rotaţie, adică aria suprafeţei de rotaţie obţinute prin rotirea elipsei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, cu $a > b$ în jurul lui $0x$.

Figura 5.7.7

Din ecuaţia elipsei se obţine, pentru arcul de elipsă situat deasupra axei Ox,

$$y = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, x \in [-a, a],$$

$$f'(x) = \frac{-b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\text{Aria}(S_f) = 2\pi \int_{-a}^{a} f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx = \frac{2\pi}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx =$$
$$= \frac{2\pi b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2+\frac{b^2}{a^2}x^2}dx = \frac{2\pi b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}dx.$$

Se ştie că la elipsă $a^2-b^2=c^2$ şi $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ se numeşte **excentricitatea** elipsei. Deci

$$\text{Aria}(S_f) = \frac{2\pi b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-(ex)^2}dx = \frac{2\pi b}{ea}\int_{-ae}^{ae}\sqrt{a^2-t^2}dt$$

$$= \frac{2\pi b}{ae}\int_{-ae}^{ae}\frac{a^2-t^2}{\sqrt{a^2-t^2}}dt = \frac{2\pi b}{ae}\left[a^2\arcsin\frac{t}{a}\Big|_{-ae}^{ae} - \int_{-ae}^{ae} t\left(\sqrt{a^2-t^2}\right)' dt\right].$$

În final se obţine

$$\text{Aria}(S_f) = 2\pi ab\left[\frac{\arcsin e}{e}+\sqrt{1-e^2}\right].$$

Capitolul 6

Probleme de analiză matematică

6.1 Enunţuri

Şiruri de numere reale

6.1.1 Folosind definiţia unui şir, arătaţi că şirul cu termenul general

a) $a_n = \dfrac{n-1}{2n+1}$, $n \geq 1$ are limita $a = \dfrac{1}{2}$.

b) $a_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$, $n \geq 1$ are limita $a = 0$.

6.1.2 Folosind criteriul general al lui Cauchy de divergenţă a şirurilor, artaţi că şirul cu termenul general

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ este divergent;

b) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{[1+3(n-1)](1+3n)}$, $n \geq 1$ este convergent.

6.1.3 Folosind teorema de convergenţă a şirurilor monotone şi mărginite să se studieze convergenţa şirurlui cu termenul general definit prin relaţia de recurenţă $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2 + a_n}$, $n \geq 2$.

6.1.4 Se dă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, n \geq 1 \;\; x_0 = a, \text{ pentru } 0 \leq a \leq 1.$$

Se cere:

a) Să se arate că acest şir este convergent;

b) Să se calculeze limita acestui şir;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2$.

(I.M. Stancu, GMB, 7892).

6.1.5 Fiind dat şirul cu termenii pozitivi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_0 \in (0,2)$ şi $x_{n+1}^4 = 2x_n^2 + 8$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi să se calculeze limita sa.

6.1.6 Să se demonstreze că dacă şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface condiţiile $a_{n+1}^2 < a_n^2$ şi $0 < a_{n+1} + a_n$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, atunci şirul este convergent.

(D.M.Bătineţu, G.M. 16374)

6.1.7 Se dau numerele $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$ şi se definesc şirurile

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n)\,,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n)\,;\, c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$; $(b_n)_{n\geq 0}$; $(c_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente şi au limita egală cu $\frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0)$.

6.1.8 Să se calculeze limita şirului cu termenul general:

a) $a_n = \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{(n+1)^p}$, $n \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \ldots + \dfrac{1}{\ln n}\right)$, $n \geq 2$.

Serii de numere reale

6.1.9 Utilizând criteriile de comparaţie, stabiliţi natura seriilor:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$; d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

6.1.10 Utilizând criteriul de condensare Cauchy, studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$.

6.1.11 Folosind criteriul lui Cauchy, studiaţi convergenţa seriilor:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n(n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n\alpha}{2^n}$.

6.1.12 Studiaţi natura seriilor:

a) $\sum \dfrac{(an)^n}{n!}$, $a \geq 0$; b) $\sum \dfrac{n!e^n}{n^{n+p}}$, $p \in \mathbb{N}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$.

6.1.13 Studiaţi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, cu $a_{2k-1} = \dfrac{2^{k-1}}{3^{k-1}}$, $a_{2k} = \dfrac{2^k}{3^k}$ pentru $k \in \mathbb{N}^*$ folosind criteriul D'Alembert şi criteriului radicalului (Cauchy).

6.1.14 Studiaţi convergenţa seriilor alternate:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{2n-1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

6.1.15 Asigurându-vă că nu se aplică criteriul lui Leibniz la seriile alternante următoare, precizaţi care serii sunt divergente, serii convergente şi absolut convergente.

a) $\sum a_n$, cu $a_{2k-1} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}-1}$, $a_{2k} = \dfrac{-1}{\sqrt{k+1}-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$;

b) $\sum a_n$, cu $a_{2k-1} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$, $a_{2k} = -\dfrac{1}{2^{k-1}}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

6.1.16 Studiaţi convergenţa absolută şi semiconvergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-n+1)}{n!}\,,\ a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}.$$

6.1.17 Arătaţi că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{\alpha(\alpha+1)\cdot(\alpha+n-1)}$, unde $\alpha > 0$, este convergentă pentru $\alpha > 2$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 2$.

6.1.18 Să se studieze natura seriilor a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Funcţii continue

6.1.19 Studiaţi continuitatea funcţiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{x - \pi}, \text{ dacă } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1, \text{ dacă } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$

b) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \left|x^2 - 4x\right| \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right);$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 7x - 12, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

6.1.20 Stabiliţi mulţimea de continuitate a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru

a) $f(x) = x^2 - \left[x^2\right];$

b) $f(x) = [x] \sin \pi x;$

c) $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right]^{[x]} + [x],\ x \in (0, \infty) \\ 1, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0], \end{cases}$ unde $[\cdot]$ este funcţia partea întreagă.

6.1.21 Studiaţi continuitatea funcţiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\sin x| \cdot e^{nx} + \cos x}{e^{nx} + 1};$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}};$

c) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{ax^2 n^{\ln x} + x}{xn^{\ln x} + 1}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

6.1.22 Verificaţi dacă următoarele funcţii pot fi prelungite prin continuitate în punctul $x_0 = 0$:

a) $f : [-1, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1};$

b) $f : [-1, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2\mathrm{tg}x \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x},\ x \in [-1, 0) \\ 2^{-\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2 e^x}},\ x \in (0, +\infty) \end{cases}$

c) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x;$

d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin \dfrac{2\pi}{x}.$

6.1.23 a) Determinaţi parametrul $a > 0$ pentru care funcţia $f : [1 + \infty) \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^x + 4a^{\frac{x}{2}} + x^2},\ x \in [1, 2] \\ \dfrac{\ln (x - 1)^{4 \sin(x-2)}}{(x - 2)^2},\ x \in (2, +\infty) \end{cases}$ este continuă.

b) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^{\frac{2x}{|x|}}, & \text{dacă} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \dfrac{ax}{|x|} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}(1 - x)^2\right), & \text{dacă} \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ b, & \text{dacă} \quad x = 0 \end{cases}$$

este continuă.

6.1.24 Demonstraţi că dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi dacă $c > 0$ este o constantă arbitrară, atunci funcţia

$$f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{dacă} & f(x) < -c \\ f(x), & \text{dacă} & |f(x)| \leq c \\ c, & \text{dacă} & f(x) > c \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}$ şi este mărginită.

6.1.25 Demonstraţi că dacă o funcţie monotonă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, realizează toate valorile cuprinse între $f(a)$ şi $f(b)$, atunci f este continuă pe $[a, b]$.

6.1.26 Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x-a}, & \text{dacă} \quad x \neq a \\ 0, & \text{dacă} \quad x = a. \end{cases}$$

Demonstraţi că pentru orice $b \in \mathbb{R}$, $b > a$ funcţia f pe intervalul $[a, b]$ realizează toate valorile cuprinse între $f(a)$ şi $f(b)$, dar funcţia f nu este continuă pe $[a, b]$.

6.1.27 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat. Arătaţi că dacă pentru o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ există o constantă $L \in (0, \infty)$ astfel încât

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in I$$

atunci funcţia f este continuă pe I. (Constanta L se numeşte constanta *Lipschitz*.)

6.1.28 Daţi câte un exemplu de funcţie mărginită pentru care mulţimea punctelor de discontinuitate este o mulţime

a) finită având p elemente, unde $p \in \mathbb{N}^*$ număr dat;

b) numărabilă;

c) nenumărabilă.

Funcţii derivabile

6.1.29 Considerăm funcţia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x \ln x - x|, & \text{dacă} \quad x \in (0, +\infty) \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$$

a) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei.

b) Arătaţi că restricţia funcţiei f la intervalul $(e, +\infty)$ are inversă şi studiaţi derivabilitatea funcţiei inverse.

6.1.30 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0, \end{cases}$$

cu $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Arătaţi că:

a) funcţia f este ori de câte ori derivabilă pe mulţimea $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

b) în punctul $x_0 = 0$ funcţia f este derivabilă de $\left[\frac{n}{2}\right]$ ori dar nu este derivabilă de $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ ori;

c) derivata $f^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)}$ este continuă în punctul $x_0 = 0$ dacă n este impar şi este discontinuă în $x_0 = 0$ dacă n este par. Prin $[\cdot]$ s-a notat funcţia parte întreagă.

6.1.31. a) Determinaţi unghiul α dintre axa Ox şi dreapta tangentă la graficul funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \tfrac{2}{3}x^5 - \tfrac{1}{9}x^3$$

în punctul de abscisă $x = 1$. Determinaţi unghiul β dintre axa Ox şi normala la grafic în acelaşi punct. Scrieţi ecuaţiile celor două drepte menţionate.

b) Are graficul funcţiei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sin x$ puncte în care tangenta dusă la grafic este paralelă cu dreapta de ecuaţie $x + 2y - 5 = 0$?

c) Pe arcul AB, unde $A(0, 0)$; $B(3, 18)$, al graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$, determinaţi un punct în care tangenta la grafic este paralelă la coarda AB.

d) Determinaţi unghiul sub care se intersectează curbele ce reprezintă graficul funcţiilor $f(x) = 8-x^2$ şi $g(x) = x^2$ (parabole).

e) Determinaţi unghiul sub care se intersectează curbele ce reprezintă graficul funcţiilor $f(x) = x^3$ şi $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

f) Pentru graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left|x^3 - x\right|$ punctul $(1, 0)$ este punct unghiular. Scrieţi ecuaţia semidreptelor tangente în acest punct graficului funcţiei şi determinaţi unghiul format de cele două semidrepte.

6.1.32 a) Demonstraţi că $e^{-x} > 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{24}x^4 - \dfrac{1}{120}x^5, \forall x \in (0, +\infty)$.

b) Demonstraţi că funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ este strict crescătoare şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ este strict descrescătoare.

6.1.33 Determinaţi punctele de extrem local pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$.

6.1.34 Stabiliţi intervalele pe care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, $h > 0$, este convexă respectiv concavă şi găsiţi punctele de inflexiune ale funcţiei.

6.1.35 a) Arătaţi că dacă rădăcinile unui polinom P de gard $n \geq 2$ cu coeficienţi reali sunt numere reale şi distincte, atunci fiecare derivată a polinomului, până la ordinul $(n - 1)$ inclusiv, are rădăcinile reale şi distincte.

b) Demonstraţi că dacă o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) şi cu proprietatea că există $c \in (a, b)$ astfel încât $(f(b) - f(c)) \cdot (f(c) - f(a)) < 0$, atunci există cel puţin un punct $d \in (a, b)$ astfel încât $f'(d) = 0$.

6.1.36 a) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat şi $f : I \to I$ o funcţie derivabilă pentru care există $M \in [0, 1)$ astfel încât $|f'(x)| \leq M, \forall x \in I$. Arătaţi că funcţia f este o contracţie.

b) Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax\mathrm{arctg}x - \dfrac{a}{2}\ln\left(x^2 + 1\right)$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie contracţie.

6.1.37. i) Pentru x apropiat de 0, aproximaţi $f(x)$ utilizând polinomul MacLaurin de ordinul 4.

a) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{tg}x$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, unde $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$;

c) $f : (-a, a) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{a - x}$, unde $a > 0$;

d) $f : (-a, a) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a + x}{a - x}$, unde $a > 0$;

e) $f(x) = \sqrt[n]{a^n - x}$, unde $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $a > 0$;

ii) Pentru x apropiat de x_0 aproximaţi $f(x)$ utilizând polinomul Taylor de ordinul 3.

a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$;

b) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$, $x_0 = 1$.

6.1.38 a) Determinaţi un interval $[-a, a]$ pe care polinomul MacLaurin de ordinul 3 pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ aproximează funcţia cu o precizie de $0,01$.

b) Aproximaţi numărul $\sin(0,6)$ cu o precizie de $0,01$.

Funcţii integrabile Riemann şi primitive

6.1.39 Scriind şirurile de mai jos ca sume Riemann, să se calculeze limitele lor

a) $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n+i}$; b) $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{i^4}{n^5}$;

c) $a_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{n}{n^2+i^2}$; d) $a_n = \dfrac{\pi}{n} \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sin \dfrac{\pi i}{n}$;

e) $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}$; f) $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n+i\frac{n+1}{n}}$;

g) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{5n+2i}}$; h) $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} \sin^2 \dfrac{i\pi}{n}$.

6.1.40 Să se calculeze limita şirului (a_n) unde

a) $a_n = \int\limits_{n}^{n+1} \dfrac{dx}{1+x^2}$; b) $a_n = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{x^n}{1+x}$.

6.1.41 Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$a_n = \int_0^1 x^n f(x)dx, \ \ n \geq 1.$$

6.1.42 Dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie monoton crescătoare, atunci are loc

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(b).$$

În particular, au loc inegalităţile

$$1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e; \ \ \sqrt{3} \leq \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx \leq \sqrt{6}.$$

6.1.43 Să se arate că funcţiile:

a) $f : [0,2] \to \mathbb{R}, \ f(x) = \min \left\{ \dfrac{2}{x^2+1}, x \right\}$;

b) $g : [0, \dfrac{5}{2} \to \mathbb{R}, \ g(x) = x - [x]$, unde $[x]$ înseamnă partea întreagă a lui x,

c) $h : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x^2, \ x \in [0,1] \setminus \left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4} \right\} \\ -1, \ x = 1/3 \\ 1, \ \ x \in \left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4} \right\} \end{cases}$$

sunt integrabile Riemann, iar apoi să se calculeze integralele lor

6.1.44 Arătaţi că următoarele funcţii admit primitive şi deduceţi primitivele lor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} x^3, \ x \leq 0 \\ x, \ \ x > 0 \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} e^x, \ x < 0 \\ 3x+1, \ \ x \geq 0 \end{cases}$

c) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, \ \ x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, \ \ x \geq 1 \end{cases}$

d) $f :]-\frac{\pi}{2}], \frac{\pi}{2} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1 + \mathrm{tg} x, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\end{cases}$

6.1.45 1) Să se arate că funcţiile următoare nu admit primitive:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} a, & x \le 0,\ a \in \mathbb{R} \\ \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{2}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg} \frac{1}{x}, x < 0 \\ 1, x \ge 0 \end{cases}$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0 \end{cases}$

g) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x \ln \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

2) Arătaţi că funcţiile următoare admit primitive:

a) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \min\left\{1, x, x^2, ...x^n\right\},\ \ n \in \mathbb{N}^*$;

b) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \max\left\{1, x, x^2, ..., x^n\right\},\ \ n \in \mathbb{N}^*$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^n}, & x \ne 0,\ n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x^n}, & x \ne 0,\ n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{k}{x}, & x \ne 0,\ n \in \mathbb{N}^*, k \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

6.1.46 Folosind integrarea prin părţi să se calculeze:

a) $\int x \ln x,\ \ x \in]0, +\infty[$; b) $\int \ln x^2 dx,\ \ x \in]0, +\infty[$;
c) $\int e^{3x} \left(x^2 + 3x\right) dx,\ x \in \mathbb{R}$; d) $\int e^{3x} \cos 2x dx,\ x \in \mathbb{R}$;
e) $\int \arcsin x dx,\ \ \ x \in]-1, 1[$; f) $\int \mathrm{arctg} x dx,\ x \in \mathbb{R}$;
g) $\int \sqrt{9 - x^2} dx,\ \ x \in]-3, 3[$; h) $\int \sqrt{x^2 - 9} dx,\ \ x \in]3, +\infty[$;
i) $\int \sqrt{x^2 + 9} dx,\ \ x \in \mathbb{R}$; j) $\int x\sqrt{9 - x^2} dx,\ \ x \in]-3, 3[$

k) $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 2}} dx, x \in \mathbb{R}; n \ge 2$. Se cere o formulă de recurenţă şi apoi I_2 şi I_3.

l) $I_n = \int x^n \sin 2x dx,\ x \in \mathbb{R}; n \ge 2$. Se cere o formulă de recurenţă şi apoi I_2 şi I_3.

6.1.47 Utilizând prima sau a doua metodă de schimbare de variabilă să se calculeze primitivele funcţiilor următoare:

a) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x},\ x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = \frac{\mathrm{arctg}^5 x}{1 + x^2},\ x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^6 + 1},\ x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = \frac{e^{\mathrm{tg} x}}{\cos^2 x},\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;

e) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^8+1}},\ x\in\mathbb{R};$ f) $f(x)=\dfrac{1}{x\left(\ln^2 x+2\right)},\ x\in\,]0,+\infty[\,;$

g) $f(x)=\dfrac{2^x}{4^x-1},\ x>0;$ h) $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2+2x},\ \ x>0;$

l) $f(x)=\dfrac{1}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}},\ x>0;$ m) $f(x)=\sqrt{16-x^2},\ x\in\,]-4,4[\,;$

n) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}},\ x>0;$ o) $f(x)=\dfrac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}},\ x\in\,]-0,3[\,;$

p) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}},\ x>1;$ r) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}},\ x\in\,]0,1[\,;$

s) $f(x)=\dfrac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x},\ x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[;$ t) $f(x)=xe^{x^2}\left(1+x^2\right),\ x\in\mathbb{R};$

6.1.48 Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii raţionale:

a) $f(x)=\dfrac{x}{(2x+1)(x+1)},\ x>-\dfrac{1}{2};$ b) $f(x)=\dfrac{x}{2x^2-3x-2},\ x>2;$

c) $f(x)=\dfrac{x-4}{x(x-1)^2},\ x>1;$ d) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+5},\ x\in\mathbb{R};$

e) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+4x+5},\ x\in\mathbb{R};$ f) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1},\ x>-1;$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+1},\ x\in\mathbb{R};$ h) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x^2+9)^2},\ x\in\mathbb{R};$

i) $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+x+1)^2},\ x\in\mathbb{R};$ j) $f(x)=\dfrac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)},\ x>1;$

l) $f(x)=\dfrac{x+4}{(x^2+4)^3},\ x\in\mathbb{R};$ m) $f(x)=\dfrac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2},\ x\in\mathbb{R};$

6.1.49 Calculaţi primitivele următoarelor funcţii trigonometrice

a) $f(x)=\dfrac{1}{5+4\sin x},\ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[;$ b) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x},\ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[;$

c) $f(x)=\dfrac{1}{2\sin x-\cos x+5},\ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[;$ d) $f(x)=\sin^2 x\ \cos^3 x,\ x\in\mathbb{R};$

e) $f(x)=\sin^5 x,\ \ x\in\mathbb{R};$ f) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x},\ x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[;$

g) $f(x)=\cos x\cos 3x\ \cos 6x,\ x\in\mathbb{R};$ h) $f(x)=\dfrac{1}{tg^8 x},\ x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[;$

i) $f(x)=\sqrt{1+\cos x},\ x\in[0,2\pi]\,;$ j) $f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}},\ x\in\left]-0,\dfrac{\pi}{2}\right[;$

6.1.50 Să se calculeze

a) $\int_0^1\dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ b) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4-x^2}}$

c) $\int\dfrac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}};\ x\in\,]-\infty,0[$ d) $\int\limits_{2}^{3}\dfrac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}};$

e) $\int\dfrac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}},\ x>0;$ f) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}};$

g) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}};$ h) $\int\sqrt{x^4+x^3}dx,\ \ x>0;$

i) $\int\dfrac{dx}{e^{2x}+e^x-2},\ x>0;$ j) $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}dx,\ x\in(0,1)\,;$

k) $\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}dx;$ l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tgx)\,dx.$

6.1.51 Calculaţi ariile mărginite de curbele următoare şi axa Ox:
a) $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}, \quad x \in [1,2]$ b) $y = f(x) = \dfrac{x + |x^2-1|}{|x+2|}, \ x \in [0,4]$

6.1.52 Calculaţi aria cuprinsă între curbele:
a) $y = f(x) = \dfrac{x^2}{2}, \ y = g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, x \in [-1,1]$;
b) $y = f(x) = x^2 + 6x, \ y = g(x) = -x^2 - 4$;
c) $y = f(x) = \ln^2 x, \ y = g(x) = -\ln x, \ x > 0$;
d) Ariile mărginite de interiorul cercului $x^2 + y^2 = 16$ şi parabola $y^2 = 6x$;
e) Aria cuprinsă în interiorul parabolelor $y^2 = 8(2-x), \ y^2 = 24(2+x)$.

6.1.53 Să se calculeze volumele corpurilor de rotaţie obţinute prin rotaţia graficului funcţiilor următoare, în jurul axei $0x$
a) $f : \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arcsin x$;
b) $f : [0,3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x-4}}$;
c) $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x) = \sqrt[4]{(x-a)(b-x)}, \ a < b$;
d) $f : [1,e] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \ln x$;
e) Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $0x$ a mulţimii mărginite de cercul $x^2 + y^2 = 4$ şi parabola $y^2 = 3x$

6.1.54 Calculaţi lungimea graficului funcţiilor:
a) $f : [1,4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln \sqrt[4]{x}$;
b) $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;
c) $f : \left[0, \dfrac{2}{3}\right] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln \dfrac{1}{1-x^2}$;
d) $f : \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(\sin x)$;
e) $f : [0,3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{9-x^2}$.

6.2 Soluţii

Şiruri de numere reale

6.2.1 Cerinţa de a justifica că un şir are o anumită limită dată este echivalentă cu: determinaţi $N(\varepsilon)$ începând de la care are loc inecuaţia (în variabila n): $|a_n - a| < \varepsilon$. În cazul exemplelor date:
a) $|a_n - a| = \left|\dfrac{n-1}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ implică $\left|\dfrac{2n-2-2n-1}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon$ sau $\dfrac{3}{2(2n+1)} < \varepsilon$. Atunci $\dfrac{2(2n+1)}{3} > \dfrac{1}{\varepsilon}$ este echivalentă cu $n > \left(\dfrac{3}{2\varepsilon} - 1\right) \cdot \dfrac{1}{2}$. Deci $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{3}{2\varepsilon} - 1\right)\right]$.

Spre exemplu: pentru $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ obţinem

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2 \cdot \frac{1}{10}} - 1\right)\right] = \left[\frac{1}{2}(15-1)\right] = [7] = 7.$$

Pentru $\varepsilon = 0,15$ rezultă

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2\cdot\frac{15}{100}} - 1\right)\right] = \left[\frac{1}{2}(\frac{300}{30} - 1)\right] = \left[\frac{9}{2}\right] = [4,5] = 4.$$

b) Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, deoarece $\left|\left(\frac{1}{5}\right)^n - 0\right| < \varepsilon$ sau $5^n > \frac{1}{\varepsilon}$. Logaritmăm ambii membrii ai inecuaţiei şi avem $n > \log_5\frac{1}{\varepsilon}$. Deci $N(\varepsilon) = \left[\log_5\frac{1}{\varepsilon}\right]$ şi am justificat că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

Exemplu: pentru $\varepsilon = 0,02 = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ avem

$$N(\varepsilon) = \left[\log_5\frac{1}{\varepsilon}\right] = [\log_5 50] = \left[\log_5 5^2\cdot 2\right] = [2\log_5 5 + \log_5 2] = [2 + 0,...] = 2.$$

6.2.2 a) Divergenţa şirului dat se va arăta prin negarea criteriului general al lui Cauchy. Aceasta revine la a găsi un majorant pentru

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}}.$$

Deci

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots\frac{1}{\sqrt{n+p}} > p\cdot\frac{1}{\sqrt{n+p}} \overset{\substack{\text{aleg}\\ p=n}}{=} \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

care nu poate fi oricât de mic ($n \geq 1$). Într-adevăr $|a_{2n} - a_n| > \frac{n}{\sqrt{n}} \to \infty$, deci (a_n) este divergent.

b) Avem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[1+3(n-1)](1+3n)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{1+3(n-1)} - \frac{1}{1+3n}\right] = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{1+3n}\right),\quad n \geq 1.$$

Atunci

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+3n} - \frac{1}{1+3n+3p}\right] < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+3n}$$

pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$. Din inecuaţia $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+3n} < \varepsilon$ rezultă $n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$. Deci

$$(\forall)\varepsilon > 0\,(\exists)\,N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)\right],\ p \in \mathbb{N}^* \text{ are loc } |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Şirul (a_n) este convergent.

6.2.3 Observăm imediat că $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} > a_{n-1}$ şi $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Folosind inegalitatea $\sqrt{a} \leq \frac{1+a}{2}$, $a > 0$ vom avea:

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}_{n \text{ ori}}} \leq \frac{1 + 2 + \sqrt{2 + \ldots\sqrt{2}}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\overbrace{\sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}^{a_{n-1}}}{2} \\
&\leq \frac{3}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{a_1}{2^{n-1}} < \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{3}{2^n} \\
&= 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 3\left(\frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3.
\end{aligned}$$

Şirul (a_n) este mărginit: $\sqrt{2} < a_n < 3$ şi fiind monoton crescător este convergent. Să aflăm limita sa. Din relaţia de recurenţă $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ notând $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = l$, obţinem prin trecerea la limită pentru $n \to \infty$, relaţia $l = \sqrt{2 + l}$, de unde $l_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$. Convine $l = 2 \in (\sqrt{2}, 3)$ care este limita şirului.

6.2.4 a) Relaţia de recurenţă va da:

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 \leq 0, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

deci

$$x_{n+1} < x_n < \ldots < x_0 = a \leq 1.$$

Şirul este monoton descrescător şi are marginea inferioară 1. Pe de altă parte, $x_1 = x_0(1 - x_0)$, iar $x_0 = a \in [0, 1] \Rightarrow 1 - x_0 \in [0, 1]$. Rezultă $x_1 \in [0, 1]$. Prin inducţie rezultă $x_n \in [0, 1]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci este mărginit. Şirul este monoton şi mărginit, deci convergent.

b) Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = l$ şi trecând la limită în relaţia de recurenţă se obţine ecuaţia $l = l - l^2$ Limita şirului este $l = 0$.

c) Avem

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^2 = -\sum_{k=0}^{n}(x_k - x_{k-1}) = -[x_n - x_0] = -x_n + x_0.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2 = x_0 = a.$

6.2.5 Din $x_0 \in (0, 2)$ va rezulta

$$x_1^4 = 2x_0^2 + 8 < 2 \cdot 2^2 + 8 = 16, \text{ deci } x_1 \in (0, 2).$$

Dar

$$x_1^4 - x_0^4 = 2x_0^2 + 8 - x_0^4 = -x_0^4 + 2x_0^2 + 8 = -(x_0^2 - 1)^2 + 9.$$

Cum

$$x_0 < 2 \Rightarrow x_0^2 < 4 \Rightarrow x_0^2 - 1 < 4 - 1 = 3 \Rightarrow (x_0^2 - 1)^2 < 9 \text{ şi } x_1^4 - x_0^4 > 0 \Rightarrow x_1 > x_0.$$

Prin inducţie se demonstrează că $x_n < x_{n+1} < 2$, $n \geq 1$. Şirul este monoton şi $x_n \in (0, 2)$ deci convergent. Limita sa se va afla din relaţia de recurenţă care implică ecuaţia $l^4 - 2l^2 - 8 = 0$. Dintre rădăcinile $l_1 = 2$, $l_2 = -2$, $l_3 = i\sqrt{2}$, $l_4 = -i\sqrt{2}$. convine $l_1 = 2 > 0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

6.2.7 Adunăm relaţiile care definesc $a_{n+1}; b_{n+1}; c_{n+1}$ şi obţinem

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n = \ldots = a_0 + b_0 + c_0 \in \mathbb{R}.$$

Notăm cu $a_0 + b_0 + c_0 = a$. Pe de altă parte $b_n + c_n = 2a_{n+1}; b_n + c_n = a - a_n = 2a_{n+1}$. Relaţia $2a_{n+1} = a - a_n$, va da:

$$\begin{array}{ll}
2a_{n+1} = a - a_n & \\
2a_n = a - a_{n-1} & \left| \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \right. \\
2a_{n-1} = a - a_{n-2} & \left| \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 \right. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
2a_1 = a - a_0 & \left| \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \right.
\end{array}$$

Înmulţim relaţiile cu factorii din dreapta şi adunând pe coloane, obţinem

$$2a_{n+1} = a\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] - a_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= a\frac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{2}} - a_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{a\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}{\dfrac{3}{2}} - a_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ şi observând că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, va rezulta

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{1}{3}a = \frac{a_0+b_0+c_0}{3}.$$

În acelaşi mod se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} c_{n+1} = \dfrac{a_0+b_0+c_0}{3}$.

Interpretarea geometrică. Fie $A_0(a_0, x_0)$; $B_0(b_0, y_0)$; $C_0(c_0, z_0)$ trei puncte în plan, care formează un triunghi. Punctele

$$A_1\left(\frac{b_0+c_0}{2}, \frac{z_0+y_0}{2}\right); B_1\left(\frac{a_0+c_0}{2}, \frac{x_0+z_0}{2}\right); C_1\left(\frac{a_0+b_0}{2}, \frac{x_0+y_0}{2}\right)$$

formează un triunghi cu vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului $A_0B_0C_0$.

Continuând procedeul, obţinem un şir de triunghiuri $A_nB_nC_n$ care tind la limită către un punct, centrul de greutate G, al triunghiului $A_0B_0C_0$, $G\left(\dfrac{a_0+b_0+c_0}{3}, \dfrac{x_0+y_0+z_0}{3}\right)$.

6.2.8 a) Se aplică Lema lui Cesaro-Stoltz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p+(n+1)^p-[1^p+2^p+\ldots+n^p]}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^p+C_p^1n^{p-1}+C_p^2n^{p-2}+\ldots+1}{n^{p+1}+C_{p+1}^1n^p+\ldots+1-n^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^p+pn^{p-1}+\ldots+1}{(p+1)n^p+\dfrac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\ldots+1} = \frac{1}{p+1}.$$

b) Se aplică Lema lui Cesaro-Stoltz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\ldots+\dfrac{1}{\ln n}+\dfrac{1}{\ln(n+1)}-\left[\dfrac{1}{\ln 2}+\ldots+\dfrac{1}{\ln n}\right]}{n+1-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\ln(n+1)}}{1} = 0.$$

Altfel, avem

$$a_n = \frac{\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\ldots+\dfrac{1}{\ln n}}{n} = m_{\text{aritm}}\left(\frac{1}{\ln 2};\ldots;\frac{1}{\ln n}\right)\cdot\frac{n-1}{n}.$$

Dar $m_{\text{aritm}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to x_n$ pentru $x_n > 0$. Va rezulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\cdot\frac{n-1}{n} = 0\cdot 1 = 0.$$

Serii de numere reale

6.2.9 a) Deoarece $\ln n \leq n$, $n \geq 1$ avem că termenul general al seriei $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \geq \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$, $n \geq 1$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, rezultă divergenţa seriei $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ (criteriul I de comparaţie).

b) Dacă $a < 1$ Rezultă $\dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} < a^n$. Cum seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a^n$ este convergentă rezultă că seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$ este convergentă.

Dacă $a = 1$, atunci avem seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ este divergentă deoarece termenul general nu tinde la zero $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = 1$.

Dacă $a > 1$, atunci $\sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n} = n$ şi $a_n = \dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \geq \dfrac{a^n}{n} \to \infty$, deci seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ este divergentă.

c) $\dfrac{1}{n2^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$, pentru $n \geq 1$ şi cum seria geometrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ este convergenă, rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$ este convergentă.

d) Pentru $n \geq 3, \ln n > 1$ şi deci $\dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n}$. Cum seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că şi seria dată este divergentă.

6.2.10 Seria dată are aceeaşi natură ca şi a cea a seriei

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha (\ln 2^n)^\beta} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{\alpha-1}(n\ln 2)^\beta} = \frac{1}{(\ln 2)^\beta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n \cdot n^\beta} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

Dacă $\alpha > 1$ şi $\beta > 0$, atunci seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ este convergentă. Într-adevăr, folosind criteriul lui D'Alambert avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{\alpha-1})^n n^\beta}{(2^{\alpha-1})^{n+1}(n+1)^\beta} \to \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1.$$

Dacă $\alpha > 1, \beta < 0, \beta = -\gamma, \gamma > 0$. În acelaşi mod ca mai sus seria $\sum a_n = \sum \dfrac{n^\gamma}{(2^{\alpha-1})^n}$ este convergentă

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{\alpha-1})^n (n+1)^\gamma}{(2^{\alpha-1})^{n+1} \cdot n^\gamma} \to \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1.$$

Dacă $\alpha = 1$, tunci $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^\beta} = \dfrac{1}{(\ln 2)^\beta} \sum \dfrac{1}{n^\beta}$ este seria armonică generalizată. Dacă $\beta > 1$ seria este convergentă şi dacă $\beta \leq 1$ seria este divergentă.

Dacă $\alpha < 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = \dfrac{1}{(\ln 2)^\beta} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(2^\delta)^n}{n^\beta}$, unde $\alpha = 1 - \delta$, $0 < \delta < 1$ este divergentă oricare ar fi $\beta \in \mathbb{R}$, deoarece termenul general $\dfrac{(2^\delta)^n}{n^\beta}$ nu tinde la zero.

6.2.11 a) Avem

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)(n+2} + \ldots + \frac{\sin(n+p)\alpha}{(n+p)(n+p+1)} \right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \end{aligned}$$

Am obţinut că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$, astfel încât $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+p+1} < \varepsilon$ pentru $n \geq N$ şi $\forall p \in \mathbb{N}$. Aşadar (S_n) este şir fundamental deci, în virtutea criteriului lui Cauchy este şir convergent. Seria dată este (absolut) convergentă.

b) Analog.

6.2.12 a) Aplicăm criteriul raportului pentru serii. Avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[a(n+1)]^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(an)^n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^n(n+1)!}{a^n(n+1)!n^n} = a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to ae.$$

Dacă $ae < 1$, adică $a < \frac{1}{e}$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Dacă $ae > 1$, adică $a > \frac{1}{e}$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Dacă $a = \frac{1}{e}$, atunci $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}$. Dar $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ şi deci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă şi $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}$, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă pe baza criteriului II de comparaţie.

b) Aplicând seriei raportul

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}} \cdot \frac{n^{n+p}}{n! \cdot e^n} = e \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} \to 1,$$

constatăm că criteriul lui D'Alembert nu este concludent. Vom aplica criteriul lui Raabe-Duhamel. Avem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{e} - 1\right] > \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1} - 1\right] = p-1.$$

Vom avea că pentru $p - 1 > 1$, adică $p > 2$, seria este convergentă.

Pentru $p < 1$ seria este divergentă, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{e} - 1\right] < \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right] = p.$$

c) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = e^{-\frac{1}{3}} \neq 0$, seria este divergentă (nu satisface criteriul necesar de convergenţă.

d) Fie $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$, $n \geq 1$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$, deci seria este convergentă.

6.2.13 Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^k}{3^k}}{\frac{2^{k-1}}{3^k}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^k}{2^{k-1}}\cdot\frac{3^k}{3^k} = 2 > 1; \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k}\cdot\frac{3^{k-1}}{2^{k-1}} = \frac{1}{3} < 1. \end{cases}$$

Constatăm că nu se poate aplica criteriul raportului (D'Alembert), deoarece raportul depinde de paritatea sau imparitatea termenului general a_n considerat.

Folosind criteriul rădăcinii obţinem

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2k-1]{a_{2k-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2^{k-1}}{3^{k-1}}\right)^{\frac{1}{2k-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{k-1}{2k-1}}}{3^{\frac{k-1}{2k-1}}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} < 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ convergentă} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2k]{a_{2k}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2^{k-1}}{3^{k-1}}\right)^{\frac{1}{2k}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{k-1}{2k}}}{3^{\frac{k}{2k}}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} < 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ convergentă} \end{cases}$$

În acest caz, oricare ar fi paritatea termenului general, seria este convergentă.

6.2.15 a) Avem

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2k-1}+a_{2k}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}+1-\sqrt{k+1}+1}{k} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

care este o serie divergentă.

6.2.16 Vom studia seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\,a_n|$. Avem

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)(a-n)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}\right| \to \left|\frac{a-n}{n+1}\right| \to 1.$$

Criteriul D'Alembert nu este concludent pentru seria valorilor absolute. Vom aplica criteriul lui Raabe-Duhamel.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n+1-|n-a|}{|n-a|}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1-n+a}{n-a} = a+1, \text{ pentru } n>a \\ \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{n+1+n-a}{n-a} = \infty, \text{ pentru } n<a \end{cases}$$

Dacă $a=0$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$ care este convergentă.

Dacă $a<0$, seria este divergentă deoarece $a+1<1$.

Fie $a<0$, caz în care

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{(-a)(1-a)\cdot\ldots\cdot(n-a+1)}{n!} = \\ &= (-1)^n b_n, (\forall)n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Seria $a_n = \sum(-1)^n b_n$ este o serie alternantă. Studiem monotonia şirului (b_n), $b_n>0$.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n-1}{n+1} < 1,\ n-a<n+1.$$

Pentru $a\le -1$, (b_n) este crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)\ne 0$. Rezultă că pentru $a\le -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$ şi seria este divergentă. Pentru $-1<a<0$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}<1 \Rightarrow (b_n)$ este descrescător.

Să arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Deoarece (b_n) este descrescător şi mărginit inferior, este convergent. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$. Considerăm şirul $(u_n)_{n\ge 1}$ astfel încât

$$b_n = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n} \text{ iar } b_{n-1} = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}}{n-1}.$$

Atunci $u_n = nb_n - (n-1)b_{n-1}$. Înlocuim pe b_n şi b_{n-1}, avem

$$u_n = n\frac{(-a)(1-a)\cdot\ldots\cdot(n-a-1)}{n!} - (n-1)\frac{(-a)(1-a)\cdot\ldots\cdot(n-a-2)}{(n-1)!} = (-a)\cdot b_{n-1}.$$

Ştim că $\lim b_n = \lim u_n = l$. Am avut $u_n = -ab_{n-1}$. Trecând la limită rezultă $l = -al \Rightarrow l = 0$.

Pe baza criteriului lui Leibniz, seria este convergentă.

6.2.17 Avem $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n+\alpha} \to 1$ când $n \to \infty$. Criteriul raportului nu se aplică (nici criteriul radicalului). Aplicăm Criteriul Raabe-Duhamel. Cum

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{n}{n+1}\cdot(\alpha-1),$$

limita sa este $\alpha - 1$.Aşadar, dacă $\alpha > 2$ seria este convergentă, iar dacă $\alpha < 2$ seria este divergentă.

Pentru $\alpha = 2$, seria se reduce la $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$, care este tocmai seria armonică (divergentă).

6.2.18 a) Fie $x_n = a^{\ln n}$ $(n \geq 1)$. Folosind criteriul lui Raabe-Duhamel, avem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a^{\ln\frac{n}{n+1}} - 1\right)n = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}} - 1}{\ln\dfrac{n}{n+1}}\cdot n\cdot\ln\frac{n}{n+1} = \ln a\cdot\ln e^{-1} = \ln\frac{1}{a}.$$

Dacă $\dfrac{1}{a} > e$, adică $\ln\dfrac{1}{a} > 1$, seria este convergentă. Dacă $\dfrac{1}{a} < e$, adică $\ln\dfrac{1}{a} < 1$, seria este divergentă.

b) Criteriul necesar de convergenţă, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$, este îndeplinit. Totuşi seria este divergentă, căci şirul sumelor parţiale,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(k+1) - \ln k\right] = \ln(n+1) \to \infty,\ \text{când } n\to\infty.$$

Funcţii continue

6.2.19 a) Pentru $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi|\, k\in\mathbb{Z}\}$ din

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{x-\pi} = \frac{x_0 + e^{\frac{1}{\sin x_0}}}{x_0 - \pi} = f(x_0)$$

rezultă că funcţia f este continuă în x_0.

Studiem continuitatea în $x_0 = k\pi, k\in\mathbb{Z}, k$ număr par. Din

$$\lim_{\substack{x\to k\pi\\ x<k\pi}}\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{0_-} = -\infty,\ \text{respectiv}\ \lim_{\substack{x\to k\pi\\ x>k\pi}}\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{0_+} = +\infty$$

rezultă că limitele

$$\lim_{\substack{x\to k\pi\\ x<k\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to k\pi\\ x<k\pi}}\frac{x+e^{\frac{1}{\sin x}}}{x-\pi} = \frac{k\pi + e^{-\infty}}{(k-1)\pi} = \frac{k\pi+0}{(k-1)\pi} = \frac{k}{k-1},$$

respectiv

$$\lim_{\substack{x\to k\pi\\ x>k\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to k\pi\\ x>k\pi}}\frac{x+e^{\frac{1}{\sin x}}}{x-\pi} = \frac{k\pi + e^{+\infty}}{(k-1)\pi} = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } k\leq 0, k \text{ par}\\ +\infty, & \text{dacă } k\geq 2, k \text{ par.}\end{cases}$$

sunt diferite, deducem că $\lim\limits_{x\to k\pi} f(x)$ nu există şi prin urmare funcţia f nu este continuă în $x_0 = k\pi$, unde k este număr par.

Studiem continuitatea în $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}, k$ număr impar. Avem

$$\lim_{\substack{x\to k\pi \\ x<k\pi}} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{0_+} = +\infty \text{ şi } \lim_{\substack{x\to k\pi \\ x>k\pi}} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{0_-} = -\infty.$$

Pentru $k \neq 1$, k impar limitele laterale

$$\lim_{\substack{x\to k\pi \\ x<k\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to k\pi \\ x<k\pi}} \frac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{x-\pi} = \frac{k\pi + e^{+\infty}}{(k-1)\pi} = \begin{cases} -\infty, \text{ dacă } k \leq -1, k \text{ impar} \\ +\infty, \text{ dacă } k \geq 3, k \text{ impar} \end{cases},$$

respectiv

$$\lim_{\substack{x\to k\pi \\ x>k\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to k\pi \\ x>k\pi}} \frac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{x-\pi} = \frac{k\pi + e^{-\infty}}{(k-1)\pi} = \frac{k\pi + 0}{(k-1)\pi} = \frac{k}{k-1}$$

sunt diferite. Atunci $\lim\limits_{x\to k\pi} f(x)$ nu există, prin urmare funcţia f nu este continuă în $x_0 = k\pi$, unde k este număr impar diferit de 1.

Pentru $k = 1$ avem $x_0 = k\pi = \pi$, limitele laterale

$$\lim_{\substack{x\to \pi \\ x<\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to \pi \\ x<\pi}} \frac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{x-\pi} = \frac{\pi + e^{+\infty}}{0_-} = -\infty,$$

respectiv

$$\lim_{\substack{x\to \pi \\ x>\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to \pi \\ x>\pi}} \frac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{x-\pi} = \frac{\pi + e^{-\infty}}{0_+} = \frac{\pi + 0}{0_+} = \frac{\pi}{0_+} = +\infty$$

sunt diferite. Atunci $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$ nu există, prin urmare funcţia f nu este continuă în $x_0 = \pi$.

În concluzie funcţia f este continuă în fiecare $x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, şi este discontinuă în fiecare $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Menţionăm că toate punctele de discontinuitate ale funcţiei f , $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, au speţa a doua.

b) Funcţia f se obţine din funcţii continue prin compunere şi înmulţire, prin urmare funcţia f este continuă pe mulţimea de definiţie $[1, +\infty)$.

c) Considerăm $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $(u_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere raţionale, $(v_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere iraţionale ambele convergente către x_0. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to\infty} (7u_n - 12) = 7x_0 - 12, \text{ iar } \lim_{n\to\infty} f(v_n) = \lim_{n\to\infty} v_n^2 = x_0^2.$$

Egalitatea $7x_0 - 12 = x_0^2$ are loc pentru $x_0 \in \{3, 4\}$.

Pentru $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$ şirurile $(f(u_n))$, $(f(v_n))$ converg către limite diferite; deducem că f nu are limită în punctele $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$, şi deci funcţia f nu este continuă în punctele $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$. Aceste puncte de discontinuitate au speţa a doua.

Funcţia f este continuă în punctul $x_0 = 3$ şi în punctul $x_0 = 4$. Demonstrăm continuitatea funcţiei în $x_0 = 3$. Este suficient să arătăm că pentru fiecare vecinătate V a numărului $f(3) = 9$ există o vecinătate U a lui $x_0 = 3$ astfel încât $f(U) \subset V$.

Considerăm funcţiile $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 7x^2 - 12$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$. Funcţiile f_1 şi f_2 sunt continue pe $\mathbb{R}$. Fie V o vecinătate a numărului $f(3) = 9$. Deoarece V este vecinătate pentru $f_1(3) = 9$ şi funcţia f_1 este continuă în $x_0 = 3$, există o vecinătate U_1 a numărului $x_0 = 3$ astfel încât $f_1(U_1) \subset V$. Deoarece V este vecinătate pentru $f_2(3) = 9$ şi funcţia f_2 este continuă în $x_0 = 3$, există o vecinătate U_2 a numărului $x_0 = 3$ astfel încât $f_2(U_2) \subset V$. Privind vecinătatea $U = U_1 \cap U_2$ a lui $x_0 = 3$ are loc $U \subset U_1, U \subset U_2$, deducem $f_1(U) \subset V$, $f_2(U) \subset V$, de unde rezultă $f(U) \subset V$.

Pentru punctul $x_0 = 4$ se procedează în mod asemănător.

6.2.20 a) Explicităm $[x^2]$. În acest scop partiţionăm domeniul de definiţie astfel

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\left(-\sqrt{k+1}, -\sqrt{k}\right] \cup [\sqrt{k}, \sqrt{k+1})\right)$$

Pentru $x \in (-\sqrt{k+1}, -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}, \sqrt{k+1})$, unde $k \in \mathbb{N}$, din $x^2 \in [k, k+1)$, $\left[x^2\right] = k$ rezultă $f(x) = x^2 - k$, şi deci f este continuă pe mulţimea $(-\sqrt{k+1}, -\sqrt{k}) \cup (\sqrt{k}, \sqrt{k+1})$.

Studiem continuitatea funcţiei f în punctele $x_0 = -\sqrt{k}$ unde $k \in \mathbb{N}^*$ respectiv $x_0 = \sqrt{k}$ unde $k \in \mathbb{N}$. Avem $f(-\sqrt{k}) = k - k = 0$, $f(\sqrt{k}) = k - k = 0$.

Deoarece limitele laterale

$$\lim_{\substack{x \to -\sqrt{k} \\ x < -\sqrt{k}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -\sqrt{k} \\ x < -\sqrt{k}}} \left(x^2 - k\right) = k - k = 0, \quad \lim_{\substack{x \to -\sqrt{k} \\ x > -\sqrt{k}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -\sqrt{k} \\ x > -\sqrt{k}}} \left(x^2 - (k-1)\right) = k - (k-1) = 1$$

sunt diferite, funcţia f nu are limită în punctul $x_0 = -\sqrt{k}$, şi deci nu este continuă în acest punct.

Deoarece limitele laterale

$$\lim_{\substack{x \to \sqrt{k} \\ x < \sqrt{k}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -\sqrt{k} \\ x < \sqrt{k}}} \left(x^2 - (k-1)\right) = k - (k-1) = 1, \quad \lim_{\substack{x \to \sqrt{k} \\ x > \sqrt{k}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -\sqrt{k} \\ x > \sqrt{k}}} (x^2 - k) = k - k = 0$$

sunt diferite, funcţia f nu are limită în punctul $x_0 = \sqrt{k}$, şi deci nu este continuă în acest punct.

În concluzie mulţimea de continuitate a funcţiei f este

$$D_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left((-\sqrt{k+1}, -\sqrt{k}) \cup (\sqrt{k}, \sqrt{k+1})\right).$$

Menţionăm că toate punctele de discontinuitate ale funcţiei f, $x = \pm\sqrt{k}$, unde $k \in \mathbb{N}$, au speţa întâi.

b) Explicităm $[x]$. În acest scop partiţionăm domeniul de definiţie astfel $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1)$.

Fie $k \in \mathbb{Z}$ arbitrar fixat. Obţinem $f(x) = k \cdot \sin \pi x$, $\forall x \in [k, k+1)$. Aşadar f este continuă pe intervalul $(k, k+1)$. Studiem continuitatea funcţiei f în punctul $x_0 = k$. Evident $f(k) = k \sin \pi k = k \cdot 0 = 0$. Ţinând cont de

$$f(x) = \begin{cases} (k-1) \sin \pi x, \forall x \in [k-1, k) \\ k \sin \pi x, \forall x \in [k, k+1) \end{cases}$$

obţinem

$$\lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} f(x) = \lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} (k-1) \sin \pi x = (k-1) \sin k\pi = (k-1) \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to k \\ x > k}} f(x) = \lim_{\substack{x \to k \\ x > k}} k \sin \pi x = k \sin k\pi = k \cdot 0 = 0$$

şi deci $\lim_{x \to k} f(x) = 0$. Din egalitatea $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$ rezultă că f este continuă în $x_0 = k$.

În concluzie funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

c) Pentru $x \in (0,1)$ avem: $[x] = 0$; $\dfrac{1}{x} > 1$ implică $\left[\dfrac{1}{x}\right] \geq 1$; $\left[\dfrac{1}{x}\right]^{[x]} = \left[\dfrac{1}{x}\right]^0 = 1$; obţinem $f(x) = 1 + 0 = 1$, iar $f(1) = \left[\dfrac{1}{1}\right]^{[1]} + [1] = 1^1 + 1 = 2$. Pentru $x \in (1, +\infty)$ avem: $[x] \geq 1$; $\dfrac{1}{x} \in (0,1)$ deci $\left[\dfrac{1}{x}\right] = 0$; $\left[\dfrac{1}{x}\right]^{[x]} = 0^{[x]} = 0$; obţinem $f(x) = 0 + [x] = [x]$.

Prin urmare $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} & x \in (-\infty, 1) \\ 2, & \text{dacă} & x = 1 \\ [x], & \text{dacă} & x \in (1, \infty) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{dacă} & x \in (-\infty, 1) \\ 2, & \text{dacă} & x = 1 \\ 1, & \text{dacă} & x \in (1, 2) \\ k, & \text{dacă} & x \in [k, k+1),\ k \in \{2, 3, 4, \ldots\} \end{cases}$

Din faptul că funcţia f este constantă pe intervalul $(-\infty, 1)$ şi pe fiecare interval $(k, k+1)$ unde $k \in \mathbb{N}^*$, deducem continuitatea funcţiei f în punctele $x \in (-\infty, 1)$ şi în punctele $x \in (k, k+1)$ unde $k \in \mathbb{N}^*$. Din egalitatea limitelor laterale $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 1 = 1$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 1 = 1$ rezultă $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$. Dar $f(1) = 2$. Din $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ rezultă că funcţia f nu este continuă în punctul $x_0 = 1$. Pentru $x_0 = k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, din faptul că limitele laterale $\lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} f(x) = \lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} (k-1) = k-1$, $\lim_{\substack{x \to k \\ x > k}} f(x) = \lim_{\substack{x \to k \\ x > k}} k = k$

sunt diferite deducem că limita $\lim\limits_{x\to k} f(x)$ nu există. Prin urmare funcţia f nu este continuă în punctul $x_0 = k$ unde $k \in \{2,3,4,\ldots\}$. Toate punctele de discontinuitate ale funcţiei f au speţa întâi.

Mulţimea de continuitate a funcţiei f este $(-\infty,1) \cup \left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} (k,k+1)\right)$.

6.2.21 Calculăm limita dată.

Pentru $x<0$ din $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx} = 0$ rezultă

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin x| \cdot e^{nx} + \cos x}{e^{nx}+1} = \frac{|\sin x| \cdot 0 + \cos x}{0+1} = \cos x.$$

Pentru $x = 0$ avem

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin 0| \cdot e^{n\cdot 0} + \cos 0}{e^{n\cdot 0}+1} = \frac{0\cdot e^0+1}{e^0+1} = \frac{1}{2}.$$

Pentru $x>0$ din $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx} = +\infty$ rezultă

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin x| \cdot e^{nx} + \cos x}{e^{nx}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}\left(|\sin x| + \dfrac{1}{e^{nx}}\cos x\right)}{e^{nx}\left(1+\dfrac{1}{e^{nx}}\right)} = \frac{|\sin x| + 0\cdot \cos x}{1+0} = |\sin x|.$$

Aşadar

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dacă} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă} \quad x=0 \\ |\sin x|, & \text{dacă} \quad x>0. \end{cases}$$

Restricţia funcţiei f la mulţimea $(-\infty,0)$ este $\cos : (-\infty,0) \to \mathbb{R}$. Ştiind că funcţia cos este continuă pe mulţimea $\mathbb{R}$ rezultă că f este continuă pe $(-\infty,0)$. Restricţia funcţiei f la mulţimea $(0,+\infty)$ este $|\sin| : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Ştiind că funcţia sin este continuă pe mulţimea $\mathbb{R}$ deducem că funcţia $|\sin|$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi rezultă că f este continuă pe $(0,+\infty)$.

Studiem continuitatea funcţiei f în punctul $x_0 = 0$. Deoarece limitele laterale

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \cos x = \cos 0 = 1, \text{ şi } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |\sin x| = |\sin 0| = 0$$

sunt diferite, rezultă că funcţia f nu are limită în punctul $x_0 = 0$. Prin urmare funcţia f nu este continuă în punctul $x_0 = 0$.

În concluzie funcţia f este continuă în fiecare punct $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ şi este discontinuă în $x = 0$.

b) Calculăm limita dată. În acest scop considerăm şirul de numere reale $a_n = 1 + x^{2n}$ şi studiem limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+x^{2(n+1)}}{1+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+x^2\cdot \left(x^2\right)^n}{1+\left(x^2\right)^n}.$$

Pentru $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ din $x^2 \in (1,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x^2\right)^n = +\infty$ deducem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+x^2\cdot \left(x^2\right)^n}{1+\left(x^2\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(x^2\right)^n \left(\dfrac{1}{\left(x^2\right)^n} + x^2\right)}{\left(x^2\right)^n \left(\dfrac{1}{\left(x^2\right)^n}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\left(x^2\right)^n} + x^2}{\dfrac{1}{\left(x^2\right)^n}+1} = \frac{0+x^2}{0+1} = x^2.$$

Pentru $x \in \{-1,1\}$ cum $x^{2n} = 1$ avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+x^{2(n+1)}}{1+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1}{1+1} = 1.$$

Pentru $x \in (-1,1)$ din $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$ deducem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+x^{2(n+1)}}{1+x^{2n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

funcţia f este

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\ 1, \text{ dacă } x \in [-1,1]. \end{cases}$$

Deoarece $f(x) = x^2$, $\forall\ x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ rezultă că funcţia f este continuă în fiecare $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Deoarece $f(x) = 1$, $\forall\ x \in (-1,1)$ rezultă că funcţia f este continuă în fiecare $x \in (-1,1)$. În punctul $x_0 = -1$, egalitatea limitelor laterale

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^2 = 1, \quad \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} 1 = 1$$

implică $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 1$. Din egalitatea $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1)$ rezultă că funcţia f este continuă în punctul $x_0 = -1$. În punctul $x_0 = 1$, egalitatea limitelor laterale

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} 1 = 1, \quad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2 = 1$$

implică $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$. Din egalitatea $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$ rezultă că funcţia f este continuă în punctul $x_0 = 1$.

În concluzie funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

c) Pentru $x \in (0,1)$ avem: $\ln x < 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} n^{\ln x} = 0, f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{ax^2 n^{\ln x} + x}{xn^{\ln x} + 1} = \frac{ax^2 \cdot 0 + x}{x \cdot 0 + 1} = x.$$

Apoi

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot 1^2 \cdot n^{\ln 1} + 1}{1 \cdot n^{\ln 1} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot n^0 + 1}{n^0 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot 1 + 1}{1+1} = \frac{a+1}{2}.$$

Pentru $x \in (1,+\infty)$ avem: $\ln x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\ln x} = +\infty$, deci

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{ax^2 n^{\ln x} + x}{xn^{\ln x} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\ln x}\left(ax^2 + x \cdot \dfrac{1}{n^{\ln x}}\right)}{n^{\ln x}\left(x + \dfrac{1}{n^{\ln x}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{ax^2 + x \cdot \dfrac{1}{n^{\ln x}}}{x + \dfrac{1}{n^{\ln x}}} = \frac{ax^2 + x \cdot 0}{x+0} = ax.$$

Aşadar

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă} \quad x \in (0,1) \\ \dfrac{a+1}{2}, & \text{dacă} \quad x = 1 \\ ax, & \text{dacă} \quad x \in (1,+\infty). \end{cases}$$

Funcţia f este continuă pe mulţimea $(0,1)$ şi pe mulţimea $(1,+\infty)$. Limitele laterale

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} x = 1; \quad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} ax = a \cdot 1 = a$$

sunt egale pentru $a = 1$ şi sunt diferite pentru $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Pentru $a = 1$ din egalitatea limitelor laterale rezultă $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$ şi comparând cu $f(1) = \dfrac{1+1}{2} = 1$ din egalitatea $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$ deducem că f

este continuă în $x_0 = 1$. Pentru $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ în punctul $x_0 = 1$ funcţia f are limite laterale diferite, rezultă că funcţia f nu are limită în punctul $x_0 = 1$ şi deci nu este continuă în acest punct.

În concluzie, pentru $a = 1$ funcţia f este continuă pe $(0, +\infty)$; iar pentru $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ funcţia f este continuă pe $(0,1) \cup (1, +\infty)$ şi este discontinuă în punctul $x_0 = 1$.

6.2.22 a) Avem

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right]}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Definim $\overline{f}$ prelungirea funcţiei f la punctul $x_0 = 0, \overline{f} : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă} \quad x \in [-1,0) \cup (0,+\infty) \\ \dfrac{3}{2}, & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$$

Se arată uşor că funcţia f, şi la fel $\overline{f}$, sunt continue pe mulţimea $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \overline{f}(x)$ $= \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{3}{2}$ şi $\overline{f}\ (0) = \dfrac{3}{2}$, din $\lim\limits_{x\to 0} \overline{f}(x) = \overline{f}\ (0)$ rezultă că funcţia $\overline{f}$ este continuă în punctul $x_0 = 0$. Aşadar funcţia f poate fi prelungită prin continuitate la punctul $x_0 = 0$.

b) Din studiul limitelor laterale

$$\lim_{\substack{x\to \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} 2\text{tg}x\text{arctg}\frac{1}{x} = 2\cdot 0\cdot\frac{-\pi}{2} = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} 2^{-\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2 e^x}} = 2^{-\infty} = 0$$

rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Definim $\overline{f}$ prelungirea funcţiei f la punctul $x_0 = 0, \overline{f} : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă} \quad x \in [-1,0) \cup (0,+\infty) \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}.$$

Se arată uşor că funcţia f, şi la fel $\overline{f}$, sunt continue pe mulţimea $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \overline{f}(x)$ $= \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ şi $\overline{f}\ (0) = 0$, din $\lim\limits_{x\to 0} \overline{f}(x) = \overline{f}\ (0)$ rezultă că funcţia $\overline{f}$ este continuă în punctul $x_0 = 0$. Aşadar funcţia f poate fi prelungită prin continuitate la punctul $x_0 = 0$.

c) Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$. Fie $\overline{f}$ o prelungire a funcţiei f la punctul $x_0 = 0$, adică

$$\overline{f} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \ \overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \ln x, & \text{dacă} \quad x \in (0,+\infty) \\ y_0, & \text{dacă} \quad x = 0, \end{cases}$$

unde $y_0 \in \mathbb{R}$ este fixat arbitrar. Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \overline{f}(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$. Pentru orice alegere a lui $\overline{f}(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ are loc $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \overline{f}(x) \neq \overline{f}(0)$ şi deci $\overline{f}$ este discontinuă în $x_0 = 0$. Toate prelungirile funcţiei f la punctul $x_0 = 0$ fiind discontinue în punctul $x_0 = 0$, funcţia f nu poate fi prelungită prin continuitate la punctul $x_0 = 0$.

d) Fie $\overline{f}$ o prelungire a funcţiei f la punctul $x_0 = 0$, adică $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \sin\dfrac{2\pi}{x}, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ y_0, & \text{dacă} \quad x = 0 \end{cases},$$

unde $y_0 \in \mathbb{R}$ este fixat arbitrar.

Considerăm şirurile de numere reale $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ convergente către 0, $u_n = \dfrac{4}{1+4n}$, $v_n = \dfrac{4}{-1+4n}$, pentru $n \in \mathbb{N}$. Deoarece limitele

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}(u_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}\left(\frac{4}{1+4n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{2\pi\cdot(1+4n)}{4} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}(v_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}\left(\frac{4}{-1+4n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{2\pi\cdot(-1+4n)}{4} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$$

sunt diferite, deducem că funcţia $\overline{f}$ nu are limită în punctul $x_0 = 0$ şi deci funcţia $\overline{f}$ este discontinuă în $x_0 = 0$, pentru orice alegere a lui $\overline{f}(0) = y_0 \in \mathbb{R}$. Aşadar funcţia f nu admite prelungire prin continuitate la punctul $x_0 = 0$.

6.2.23 a) Pe intervalul $[1,2)$ funcţia f este rezultatul compunerii unor funcţii continue. La fel pe intervalul $(2,+\infty)$. Prin urmare funcţia f este continuă pe $[1,2)$ şi pe $(2,+\infty)$. Avem limitele laterale

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \sqrt{a^x + 4a^{\frac{x}{2}} + x^2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \sqrt{a^2 + 4a^{\frac{2}{2}} + 2^2} = \sqrt{(a+2)^2} = |a+2| = a+2;$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{\ln(x-1)^{4\sin(x-2)}}{(x-2)^2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{4\sin(x-2)\cdot\ln(x-1)}{(x-2)^2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} 4\cdot\frac{\sin(x-2)}{x-2}\cdot\frac{\ln(1+(x-2))}{x-2} = 4.$$

Dacă $a \in (0,+\infty)\setminus\{2\}$, atunci $a+2 \neq 4$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$ şi deci funcţia f nu are limită în punctul $x_0 = 2$; deducem că funcţia f nu este continuă în punctul $x_0 = 2$. Dacă $a = 2$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 4$ implică $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ şi comparând cu $f(2) = 4$, din egalitatea $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ deducem că f este continuă în $x_0 = 2$.

În concluzie funcţia f cu $a > 0$ este continuă pe mulţimea de definiţie dacă şi numai dacă $a = 2$.

b) Pentru $x < 0$ avem $\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{-x} = -1$, iar pentru $x > 0$ avem $\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{x} = 1$. Aşadar

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{-2}, & \text{dacă} \quad x \in (-\infty,-1) \\ -a\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(1-x)^2\right), & \text{dacă} \quad x \in [-1,0) \\ b, & \text{dacă} \quad x = 0 \\ a\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(1-x)^2\right), & \text{dacă} \quad x \in (0,1] \\ \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2}, & \text{dacă} \quad x \in (1,+\infty). \end{cases}$$

Pe fiecare interval $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$ funcţia f este rezultat al compunerii unor funcţii continue, prin urmare funcţia f este continuă pe fiecare interval menţionat.

Din

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-2} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2} = 0$$

şi

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} -a\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)^2\right) = -a\cdot\sin 2\pi = 0,$$

rezultă $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$; comparăm cu $f(-1) = -a\sin 2\pi = 0$; găsim $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$ şi deducem că f este continuă în $x_0 = -1$. Concluzia fiind independentă de valoarea lui $a \in \mathbb{R}$.

Din

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} a\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)^2\right) = a\cdot\sin 0 = 0 \text{ şi } \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = 0,$$

rezultă $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$; comparăm cu $f(1) = a\sin 0 = 0$; găsim $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ şi deducem că f este continuă în $x_0 = 1$. Concluzia fiind independentă de valoarea lui $a \in \mathbb{R}$.

Din

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -a\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)^2\right) = -a\sin\frac{\pi}{2} = -a \text{ şi } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} a\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)^2\right) = a\sin\frac{\pi}{2} = a,$$

cum $f(0) = b$, deducem că funcţia f este continuă în punctul $x_0 = 0$ dacă şi numai dacă $-a = a = b$ ceea ce revine la $a = b = 0$.

Aşadar funcţia f este continuă pe mulţimea de definiţie dacă şi numai dacă $a = b = 0$.

6.2.24 Considerăm funcţiile $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, respectiv $h(x) = f(x) - c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demonstrăm egalitatea

$$f_c(x) = \frac{|g(x)| - |h(x)|}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $f(x) < -c$, atunci $f(x) + c < 0$, $f(x) - c < -2c < 0$ şi prin explicitarea modulelor obţinem

$$\frac{|g(x)| - |h(x)|}{2} = \frac{|f(x)+c| - |f(x)-c|}{2} = \frac{(-f(x)-c) - (-f(x)+c)}{2} = -c = f_c(x).$$

Dacă $|f(x)| \le c$, atunci $-c \le f(x) \le c$ şi deci $f(x) + c \ge 0$, $f(x) - c \le 0$. Prin explicitarea modulelor obţinem

$$\frac{|g(x)| - |h(x)|}{2} = \frac{|f(x)+c| - |f(x)-c|}{2} = \frac{(f(x)+c) - (-f(x)+c)}{2} = f(x) = f_c(x).$$

Dacă $f(x) > c$, atunci $f(x) + c > 2c > 0$, $f(x) - c > 0$ şi prin explicitarea modulelor obţinem

$$\frac{|g(x)| - |h(x)|}{2} = \frac{|f(x)+c| - |f(x)-c|}{2} = \frac{(f(x)+c) - (f(x)-c)}{2} = c = f_c(x).$$

Din continuitatea funcţiei f pe $\mathbb{R}$ rezultă continuitatea funcţiilor g şi h pe $\mathbb{R}$. Deoarece funcţia modul $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ păstrează continuitatea, deducem că $|g|$ şi $|h|$ sunt continue pe $\mathbb{R}$. Cum operaţiile aritmetice păstrează continuitatea, deducem că funcţia $\frac{|g| - |h|}{2} = f_c$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

Din $|f_c(x)| \le c, \forall x \in \mathbb{R}$ adică $f_c(x) \in [-c, c], \forall x \in \mathbb{R}$ deducem că funcţia f_c este mărginită.

6.2.25 Utilizăm teorema de existenţă a limitelor laterale în cazul funcţiilor monotone. Considerăm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ crescătoare. Pentru f descrescătoare se va raţiona în mod asemănător. Presupunem că f nu este continuă pe $[a, b]$. Atunci există $x_0 \in [a, b]$ punct de discontinuitate pentru f.

Dacă $x_0 \in (a, b)$, atunci pe baza monotoniei funcţiei f are loc $f(a) \le f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0) \le f(b)$. Din $a \le x < x_0 \Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(x_0 - 0)$ şi $x_0 < x \le b \Rightarrow f(x_0 + 0) \le f(x) \le f(b)$ deducem că pentru $y \in (f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)), y \ne f(x_0)$ nu există $x \in [a, b]$ astfel încât $y = f(x)$, cu toate că valoarea y este cuprinsă între $f(a)$ şi $f(b)$.

Dacă $x_0 = a$, atunci pe baza monotoniei funcţiei f are loc $f(a) < f(a + 0) \le f(b)$. Deoarece $a < x \le b \Rightarrow f(a + 0) \le f(x) \le f(b)$ deducem că pentru $y \in (f(a), f(a + 0))$ nu există $x \in [a, b]$ astfel încât $y = f(x)$, cu toate că valoarea y este cuprinsă între $f(a)$ şi $f(b)$.

Dacă $x_0 = b$, atunci pe baza monotoniei funcţiei f are loc $f(a) \le f(b - 0) < f(b)$. Deoarece $a \le x < b \Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(b - 0)$ deducem că pentru $y \in (f(b - 0), f(b))$ nu există $x \in [a, b]$ astfel încât $y = f(x)$, cu toate că valoarea y este cuprinsă între $f(a)$ şi $f(b)$.

Presupunerea noastră duce la contradicţie, deci este incorectă. Aşadar f este continuă pe $[a, b]$.

6.2.26 Avem $f(a) = 0, f(b) = \sin\frac{1}{b-a}$. Notăm cu B mulţimea numerelor cuprinse între 0 şi $f(b)$. Avem de arătat că pentru orice $y \in B$ există $x \in [a, b]$ astfel ca $y = f(x)$.

Evident $0,\ f(b) \in [-1, 1]$ şi atunci $B \subset [-1, 1]$.

Din $y \in B$ rezultă $y \in [-1, 1]$, aşadar ecuaţia $\sin\frac{1}{x-a} = y, x \in \mathbb{R}$ are soluţii.

$$\frac{1}{x-a}=(-1)^k\arcsin y+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$
$$x-a=\frac{1}{(-1)^k\arcsin y+k\pi}, k\in\mathbb{Z}$$
$$x=a+\frac{1}{(-1)^k\arcsin y+k\pi}, k\in\mathbb{Z}$$

Determinăm o valoare $k_0\in\mathbb{Z}$ pentru care $x_{k_0}=a+\dfrac{1}{(-1)^{k_0}\arcsin y+k_0\pi}\in[a,b]$. Deoarece $\arcsin y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ oricare ar fi $y\in[-1,1]$, pentru k_0 număr natural nenul par avem

$$0<-\frac{\pi}{2}+k_0\pi\leq(-1)^{k_0}\arcsin y+k_0\pi\leq\frac{\pi}{2}+k_0\pi,$$
$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k_0\pi}\leq\frac{1}{(-1)^{k_0}\arcsin y+k_0\pi}\leq\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+k_0\pi},$$
$$a<a+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k_0\pi}\leq a+\frac{1}{(-1)^{k_0}\arcsin y+k\pi}\leq a+\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+k_0\pi}$$

Inegalitatea $a+\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}+k_0\pi}\leq b$ are loc pentru $k_0\geq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi(b-a)}$. Deci pentru orice $y\in B$ există $x\in[a,b]$ astfel încât $y=\sin\dfrac{1}{x-a}$, de exemplu $x=a+\dfrac{1}{\arcsin y+k_0\pi}$, unde k_0 este un număr natural par cu proprietatea $k_0\geq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi(b-a)}$. Restricţia funcţiei f la intervalul $(a,b]$ este compunere de funcţii continue, deci funcţia f este continuă pe mulţimea $(a,b]$. Studiem funcţia în punctul $x_0=a$. Considerăm şirurile de numere reale $(u_n)_{n\geq1}$, $(v_n)_{n\geq1}$ astfel

$$u_n=a+\frac{1}{\frac{\pi}{4}+2n\pi}\text{ şi }v_n=a+\frac{1}{\frac{\pi}{3}+2n\pi},\quad\text{dacă }n\geq-\frac{1}{8}+\frac{1}{2\pi(b-a)};$$

$$u_n=v_n=a,\quad\text{dacă }n<-\frac{1}{8}+\frac{1}{2\pi(b-a)}.$$

Ele sunt convergente către a şi are loc $u_n,v_n\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N}$. Cum

$$\lim_{n\to\infty}f(u_n)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq\lim_{n\to\infty}f(v_n)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

rezultă că limita $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)$ nu există, şi prin urmare f nu este continuă în punctul $x_0=a$. Din acest motiv funcţia f nu este continuă pe $[a,b]$.

6.2.27 Fie $x_0\in I$ arbitrar. Arătăm că funcţia f este continuă în x_0.

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar. Definim $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\epsilon}{L}$. Din $\epsilon>0, L>0$ rezultă $\delta(\varepsilon)>0$. Pentru $x\in I$ cu proprietatea $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)=\dfrac{\epsilon}{L}$ aplicând inegalitatea din enunţul problemei luând $x_1=x, x_2=x_0$ obţinem $|f(x)-f(x_0)|\leq L\cdot|x-x_0|$ şi cu inegalitatea $|x-x_0|<\dfrac{\epsilon}{L}$ deducem

$$|f(x)-f(x_0)|\leq L\cdot|x-x_0|<L\cdot\frac{\epsilon}{L}=\epsilon.$$

Deci pentru $\varepsilon>0$ arbitrar există $\delta(\varepsilon)>0$ (şi anume $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\epsilon}{L}$) astfel încât $x\in I, |x-x_0|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, ceea ce înseamnă că funcţia f este continuă în punctul x_0.

Cum $x_0\in I$ a fost arbitrar, deducem că f este continuă pe I.

Altă abordare. Pentru fiecare $x_0 \in I$ din $|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|, \forall x \in I$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} L \cdot |x - x_0| = 0$, utilizând criteriul majorării, rezultă că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Această egalitate ne spune că funcţia f este continuă în x_0.

Altă abordare. Pentru $\epsilon > 0$ definim $\delta(\epsilon) = \dfrac{\epsilon}{L} > 0$. Pentru orice $x, u \in I, |x - u| < \delta(\epsilon)$, utilizând inegalitatea din enunţul problemei, rezultă că $|f(x) - f(u)| \leq L|x - u| < L\delta(\epsilon) = L\dfrac{\epsilon}{L} = \epsilon$. Aşadar f este uniform continuă pe I, şi deci este continuă pe I.

6.2.28 a) Fie $p \in \mathbb{N}^*$ număr dat. Fixăm p numere reale distincte $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ şi considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x - a_1} + \sin \dfrac{1}{x - a_2} + \ldots + \sin \dfrac{1}{x - a_p}, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_p\} \\ 0, & \text{dacă} \quad x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}. \end{cases}$$

Funcţia f este continuă pe mulţimea $(-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup (a_2, a_3) \cup \ldots \cup (a_{p-1}, a_p) \cup (a_p, +\infty)$. Funcţia f nu are limită în punctele $a_1, a_2, \ldots, a_p$ şi deci este discontinuă în aceste puncte. Mulţimea punctelor de discontinuitate a funcţiei f este mulţimea $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, finită, având p elemente.

Din $\sin t \in [-1, 1], \forall t \in \mathbb{R}$ deducem $f(x) \in [-p, p], \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcţia f este mărginită.

b) Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$, unde $[\cdot]$ este funcţia partea întreagă. Pentru fiecare $k \in \mathbb{Z}$ avem $f(x) = x - k, \forall x \in [k, k+1)$; rezultă că funcţia f este continuă pe fiecare interval $(k, k+1)$ şi deci pe mulţimea $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} (k, k+1)$. Deoarece limitele laterale $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ x < k}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to k \\ x < k}} (k - 1) = k - 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ x > k}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to k \\ x > k}} k = k$ sunt diferite, deducem că funcţia f nu are limită în punctele $k \in \mathbb{Z}$, şi deci este discontinuă în aceste puncte. Mulţimea punctelor de discontinuitate a funcţiei f este mulţimea $\mathbb{Z}$, numărabilă.

Menţionăm că $x - [x] = \{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x şi $\{x\} \in [0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(x) \in [0, 1), \forall x \in \mathbb{R}$ de unde rezultă că funcţia f este mărginită.

c) Fixăm $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 < a_2$. Considerăm funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} a_1, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ a_2, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Considerăm $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar. Arătăm că f este discontinuă în x_0. Fie $(u_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere raţionale şi $(v_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere iraţionale, ambele convergente către x_0. Atunci $f(u_n) = a_1, \forall n \in \mathbb{N}$, $f(v_n) = a_2, \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_1 = a_1$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(v_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_2 = a_2$. Cum şirurile $(f(u_n))_{n \geq 1}$, $(f(v_n))_{n \geq 1}$ converg la limite diferite, deducem că funcţia f nu are limită în punctul x_0 şi prin urmare nu este continuă în x_0. Mulţimea punctelor de discontinuitate a funcţiei f este mulţimea $\mathbb{R}$, mulţime nenumărabilă.

Din $f(x) \in [a_1, a_2], \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că funcţia f este mărginită.

Funcţii derivabile

6.2.29 a) Pe intervalul $(0, +\infty)$ funcţia f este continuă, deoarece este rezultatul compunerii unor funcţii continue pe $(0, +\infty)$.

Explicităm modulul. Pentru $x \in (0, e)$ avem $\ln x < 1$, $\ln x - 1 < 0$, $|\ln x - 1| = -\ln x + 1$. Pentru $x \in [e, +\infty)$ avem $\ln x \geq 1$, $\ln x - 1 \geq 0$, $|\ln x - 1| = \ln x - 1$. Aşadar

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x = 0 \\ -x \ln x + x, & \text{dacă} \quad x \in (0, e) \\ x \ln x - x, & \text{dacă} \quad x \in [e, +\infty). \end{cases}$$

Studiem continuitatea funcţiei în punctul $x_0 = 0$. Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (-x \ln x + x) = 0$. Egalitatea $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$ ne spune că funcţia f este continuă (la dreapta) în punctul $x_0 = 0$. Aşadar, funcţia f este continuă pe mulţimea de definiţie $[0, +\infty)$.

Studiem derivabilitatea funcţiei. Aplicând regulile de derivare obişnuite, dar numai în acele puncte interioare ale mulţimii de definiţie care nu sunt puncte de ramificare, obţinem

$$f'(x) = \begin{cases} -\ln x, & \text{dacă} \quad x \in (0, e) \\ \ln x, & \text{dacă} \quad x \in (e, +\infty) \end{cases}.$$

În punctul $x_0 = 0$ avem

$$f'_d(e) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{(-x \ln x + x) - 0}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 - \ln x) = 1 - (-\infty) = +\infty \notin \mathbb{R},$$

deci f nu este derivabilă (la dreapta) în punctul $x_0 = 0$.

În punctul $x_0 = e$ derivatele laterale $f'_s(e) = -1$, $f'_d(e) = 1$ sunt diferite, din acest motiv funcţia f nu este derivabilă în acest punct.

Mulţimea de derivabilitate a funcţiei f este $(0, e) \cup (e, +\infty)$. Menţionăm că punctul $(e, f(e)) = (e, 0)$ este punct unghiular al graficului funcţiei f.

b) Notăm cu g restricţia funcţiei f la intervalul $(e, +\infty)$, cu domeniul valorilor redus la $(0, +\infty)$, corespunzător valorilor realizate de f, pozitive datorită modulului. Deci $g : (e, +\infty) \to (0, +\infty)$,

$$g(x) = |x \ln x - x| = x \ln x - x.$$

Din $g'(x) = \ln x > 0, \forall x \in (e, +\infty)$ obţinem că g este strict monotonă (crescătoare) pe intervalul $(e, +\infty)$. Deci g este injectivă. Funcţia g fiind continuă, transformă orice interval în interval; fiind strict crescătoare pe $(e, +\infty)$ cu $g(e) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, deducem că $g((e, +\infty)) = (0, +\infty)$, egalitate ce ne spune că funcţia g este surjectivă.

Funcţia g fiind injectivă şi surjectivă rezultă că este bijectivă. Funcţia g fiind bijectivă, este şi inversabilă. Notăm cu g^{-1} inversa lui g, $g^{-1} : (0, +\infty) \to (e, +\infty)$.

Deoarece g este continuă şi bijectivă, din $g'(x) = \ln x \neq 0$ pentru $\forall x \in (e, +\infty)$ deducem că funcţia inversă g^{-1} este derivabilă în fiecare punct $y = g(x)$ cu $x \in (e, +\infty)$, adică în fiecare punct $y \in (0, +\infty)$, şi

$$\left(g^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{g'\left(\left(g^{-1}\right)(y)\right)} = \frac{1}{\ln\left(\left(g^{-1}\right)(y)\right)}, \forall y \in (0, +\infty).$$

6.2.30 Pe mulţimea $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ funcţia f se obţine prin compunerea unor funcţii ori de câte ori derivabile pe această mulţime, prin urmare f este ori de câte ori derivabilă pe $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ şi $i \in \mathbb{N}^*$ avem

$f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}$

$f''(x) = n(n-1) x^{n-2} \sin \frac{1}{x} - 2(n-1) x^{n-3} \cos \frac{1}{x} - x^{n-4} \sin \frac{1}{x}$

....

$f^{(i)}(x) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-i+1) x^{n-i} \sin \frac{1}{x} - \ \ldots \pm x^{n-2i} \cdot \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, \text{ dacă } i \text{ impar} \\ \sin \frac{1}{x}, \text{ dacă } i \text{ par} \end{cases}$

Privind punctul $x_0 = 0$: deoarece $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ şi $\sin \frac{1}{x} \in [-1, 1]$ este funcţie mărginită avem $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^n \sin \frac{1}{x}\right) = 0$; cum $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ deducem că în punctul $x_0 = 0$ funcţia f este continuă. Dacă $n - 2i \geq 1$, atunci $\lim\limits_{x \to 0} x^{n-2i} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^{n-2i} \sin \frac{1}{x}\right) = 0$ şi deducem $\lim\limits_{x \to 0} f^{(i)}(x) = 0$, unde $i \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right\}$.

Având $f^{(0)}$ continuă în $x_0 = 0$, unde $f^{(0)} = f$, raţionăm inductiv pentru $k \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right\}$: presupunând $f^{(k-1)}$ continuă în $x_0 = 0$; din existenţa limitei $\lim\limits_{x \to 0} \left(f^{(k-1)}(x)\right)' = \lim\limits_{x \to 0} f^{(k)}(x) = 0$, pe baza consecinţei teoremei lui Lagrange rezultă că $f^{(k-1)}$ are derivată în $x_0 = 0$ şi anume

$$\left(f^{(k-1)}\right)'(0) = \lim_{x \to 0} \left(f^{(k-1)}(x)\right)' = 0,$$

ceea ce înseamnă că în $x_0 = 0$ funţia f este derivabilă de k ori şi $f^{(k)}(0) = 0$; comparând cu $\lim\limits_{x \to 0} f^{(k)}(x) = 0$ deducem că funcţia $f^{(k)}$ este continuă în $x_0 = 0$.

În acest fel rezultă, succesiv pentru fiecare $i \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right\}$, că funcţia f este de i ori derivabilă în $x_0 = 0$, $f^{(i)}(0) = 0$ şi $f^{(i)}$ este continuă în $x_0 = 0$.

Dacă n este impar, $n = 2p+1$, atunci $\left[\frac{n-1}{2}\right] = \left[\frac{(2p+1)-1}{2}\right] = p = \left[\frac{n}{2}\right]$. Mai arătăm că în $x_0 = 0$ funcţia f nu este de $p+1$ ori derivabilă. Ultimul termen al funcţiei $f^{(p)}$ fiind de tipul $x^{n-2p}\cos\frac{1}{x} = x\cos\frac{1}{x}$ deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(p)}(x) - f^{(p)}(0)}{x-0}$ nu există şi deci $f^{(p)}$ nu este derivabilă în $x_0 = 0$. Rezultă că f nu este de $p+1 = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ ori derivabilă în $x_0 = 0$.

Dacă n este par, $n = 2p$, atunci $\left[\frac{n-1}{2}\right] = \left[\frac{2p-1}{2}\right] = p-1$. Arătăm că în $x_0 = 0$ funcţia $f^{(p-1)}$ este derivabilă. Ultimul termen al funcţiei $f^{(p-1)}$ fiind de tipul $x^{n-2(p-1)}\cos\frac{1}{x} = x^2\cos\frac{1}{x}$ deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(p-1)}(x) - f^{(p-1)}(0)}{x-0}$ există şi deci $f^{(p-1)}$ este derivabilă în $x_0 = 0$, ceea ce înseamnă că f este de $p = \frac{n}{2} = \left[\frac{n}{2}\right]$ ori derivabilă în acest punct. Arătăm că $f^{(p)}$ nu este continuă în $x_0 = 0$. Va rezulta că $f^{(p)}$ nu este derivabilă în $x_0 = 0$, şi deci f nu este de $p+1 = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ ori derivabilă în $x_0 = 0$. Ultimul termen al funcţiei $f^{(p)}$ fiind de tipul $x^{n-2p}\cos\frac{1}{x} = \cos\frac{1}{x}$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0} f^{(p)}(x)$ nu există şi deci $f^{(p)} = f^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)}$ nu este continuă în $x_0 = 0$.

6.2.32 a) Unghiul α se determină din relaţia tg$\alpha = f'(1)$. Cum $f'(x) = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$, avem $f'(1) = 3$. Atunci tg$\alpha = 3$ şi $\alpha = \text{arctg}3 = 71°43'$. Ecuaţia dreptei tangente la grafic în punctul $(1, f(1))$ este

$$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1),$$

deci

$$y - \frac{5}{9} = 3(x-1).$$

Unghiul β se poate determina din relaţia tg$\beta = -\dfrac{1}{f'(1)}$. Obţinem tg$\beta = -\dfrac{1}{3}$, deci $\beta = \text{arctg}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

Ecuaţia normalei graficului în punctul $(1, f(1))$ este

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}\cdot(x-1),$$

deci

$$y - \frac{5}{9} = -\frac{1}{3}(x-1).$$

b) Avem $f'(x) = \cos x, \forall x \in [0,\pi]$. Tangenta în punctul $(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei f are panta $f'(x_0) = \cos x_0$. Dreapta de ecuaţie $x + 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$ are panta $-\dfrac{1}{2}$. Cele două drepte sunt paralele atunci când au pantele egale. Din $\cos x_0 = -\dfrac{1}{2}$ cu $x_0 \in [0,\pi]$ obţinem $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}$. Deci pe graficul funcţiei f există un punct cu proprietatea cerută şi anume punctul

$$(x_0, f(x_0)) = \left(\frac{2\pi}{3}, f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{2\pi}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

c) Funcţia f fiind continuă pe $[0,3]$ şi derivabilă pe $(0,3)$ îndeplineşte condiţiile teoremei lui Lagrange pe intervalul $[0,3]$. Pe baza teoremei, există cel puţin un $c \in (0,3)$ în care

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3-0};$$

tangenta dusă la grafic în punctul $(c, f(c))$ este paralelă la coarda AB unde $A(0, f(0)) = (0,0)$ şi $B(3, f(3)) = (3, 18)$. Determinăm c.

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3-0} \Leftrightarrow 3c^2 - 3 = 6 \text{ cu soluţiile } c_1 = -\sqrt{3} \notin (0,3), c_2 = \sqrt{3} \in (0,3)$$

Aşadar există un singur punct cu proprietatea cerută şi anume

$$(c, f(c)) = \left(\sqrt{3}, f\left(\sqrt{3}\right)\right) = \left(\sqrt{3}, 0\right).$$

d) Determinăm punctele comune ale celor două curbe (parabole) rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} y = 8 - x^2 \\ y = x^2. \end{cases}$$

Găsim

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$$

Unghiul sub care se intersectează două curbe într-un punct comun este egal cu unghiul format de dreptele tangente în acel punct la prima şi respectiv la a doua curbă. Notăm cu α unghiul sub care se intersectează graficele funcţiilor f, g în punctul $A(-2, 4)$ şi cu β unghiul sub care se intersectează în punctul $B(2, 4)$.

Panta dreptei tangente în punctul $A(-2, 4)$ la graficul lui f este $f'(-2) = 4$, iar panta dreptei tangente în acelaşi punct la graficul lui g este $g'(-2) = -4$. Unghiul format de aceste două drepte este egal cu unghiul căutat α; având

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f'(-2) - g'(-2)}{1 + f'(-2)\, g'(-2)} = \frac{4 - (-4)}{1 + 4 \cdot (-4)} = -\frac{8}{15},$$

obţinem $\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{8}{15}\right)$.

Panta dreptei tangente în punctul $B(2, 4)$ la graficul lui f este $f'(2) = -4$, iar panta dreptei tangente în acelaşi punct la graficul lui g este $g'(2) = 4$. Din

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f'(2) - g'(2)}{1 + f'(2)\, g'(2)} = \frac{(-4) - 4}{1 + (-4) \cdot (4)} = \frac{8}{15},$$

obţinem $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{15}\right)$.

e) Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 = 1 \\ y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

găsim că cele două curbe au un singur punct comun $A(1, 1)$. Notăm cu α unghiul cerut. Avem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f'(1) - g'(1)}{1 + f'(1)\, g'(1)} = \frac{3 - (-2)}{1 + 3 \cdot (-2)} = -1,$$

deci $\alpha = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

f) Explicităm modulul în vecinătatea punctului $x_0 = 1$. Obţinem

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x, \text{ dacă } x \in (0, 1) \\ x^3 - x, \text{ dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases} \text{ şi } f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1, \text{ dacă } x \in (0, 1) \\ 3x^2 - 1, \text{ dacă } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Avem

$$f_s'(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\left(-x^3 + x\right) - 0}{x - 1} = -2,$$

$$f_d'(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\left(x^3 - x\right) - 0}{x - 1} = 2.$$

Semidreapta tangentă graficului în punctul $(1, f(1)) = (1, 0)$, la stânga acestui punct, are panta (coeficientul unghiular) $f'_s(1)$ şi ecuaţia

$$y - f(1) = f'_s(1) \cdot (x-1), \text{ adică } y = -2(x-1), \text{ unde } x \leq 1.$$

Semidreapta tangentă graficului în punctul $(1, f(1)) = (1, 0)$, la dreapta acestui punct, are panta (coeficientul unghiular) $f'_d(1)$ şi ecuaţia

$$y - f(1) = f'_d(1) \cdot (x-1) \text{ adică } y = 2(x-1), \text{ unde } x \geq 1.$$

Privind unghiul α format de aceste două semidrepte avem $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ şi deducem $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$.

6.2.32 a) Inegalitatea se scrie

$$e^{-x} - 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 > 0, \forall x \in (0, +\infty).$$

Studiem funcţia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-x} - 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5.$$

Funcţia f este ori de câte ori derivabilă. Avem

$f(0) = 0$

$f'(x) = -e^{-x} + 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4, f'(0) = 0$

$f''(x) = e^{-x} - 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3, f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -e^{-x} + 1 - x + \frac{1}{2}x^2, f^{(3)}(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = e^{-x} - 1 + x, f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = -e^{-x} + 1, f^{(5)}(0) = 0$

$f^{(6)}(x) = e^{-x}, f^{(6)}(0) = 1$

Succesiv rezultă datele pentru următorul tabel:

x	0		$+\infty$
$f^{(6)}(x) = e^{-x}$	1	$+++$	
$f^{(5)}(x)$	0	$\nearrow$	
$f^{(5)}(x)$	0	$+++$	
$f^{(4)}(x)$	0	$\nearrow$	
$f^{(4)}(x)$	0	$+++$	
$f^{(3)}(x)$	0	$\nearrow$	
$f^{(3)}(x)$	0	$+++$	
$f''(x)$	0	$\nearrow$	
$f''(x)$	0	$+++$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$	0	$+++$	

Citind din tabel semnul lui $f'(x)$ rezultă că f este strict crescătoare pe $[0, +\infty)$ şi cum $f(0) = 0$ deducem că $f(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ adică inegalitatea cerută. b) Arătăm că $f'(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$. De aici rezultă că f este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$. Avem

$$f'(x) = \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[-\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right].$$

Deoarece $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ rămâne să arătăm că

$$u(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x+1} + \ln(x+1) - \ln x > 0, \forall x \in (0, +\infty).$$

Din

$$u'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0, \forall x \in (0, +\infty),$$

rezultă că u este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$, şi ţinând cont de

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\frac{1}{x+1} + \ln(x+1) - \ln x\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x+1} + \ln\frac{x+1}{x}\right) = 0,$$

rezultă că $u(x) > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Arătăm că $g'(x) < 0, \forall x \in (0, +\infty)$ de unde rezultă că g este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$. Avem

$$g'(x) = \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}\right)' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \left[-\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right].$$

Deoarece $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ rămâne să arătăm că

$$v(x) = -\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} + \ln(x+1) - \ln x < 0, \forall x \in (0, +\infty).$$

Din

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$$

rezultă că v este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$, şi ţinând cont de

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} v(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\frac{1}{x} + \ln(x+1) - \ln x\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\frac{1 + x\ln x}{x} + \ln(x+1)\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} v(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x} + \ln\frac{x+1}{x}\right) = 0 + \ln 1 = 0$$

rezultă că $v(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

6.2.33 Deoarece f este funcţie periodică cu perioada $T = 2\pi$, vom studia funcţia pe intervalul $[0, 2\pi)$. Punctele de extrem local ale unei funcţii f se află printre punctele sale staţionare. Din acest motiv determinăm punctele staţionare ale funcţiei date. Avem $f'(x) = -2\sin x + \sin 2x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow -2\sin x + 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(-1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ sau $\cos x = 1$. Din $\sin x = 0, x \in [0, 2\pi)$ obţinem $x = 0$ sau $x = \pi$. Din $\cos x = 1, x \in [0, 2\pi)$ obţinem $x = 0$. Aşadar în intervalul $[0, 2\pi)$ funcţia f are două puncte staţionare $x_1 = 0$ şi $x_2 = \pi$. Studiem pe rând cele două puncte.

Privind $x_1 = 0$ avem: $f''(x) = -2\cos x + 2\cos 2x$, $f''(0) = 0$; $f^{(3)}(x) = 2\sin x - 4\sin 2x$, $f^{(3)}(0) = 0$; $f^{(4)}(x) = 2\cos x - 8\cos 2x$, $f^{(4)}(0) = -6$. Din $f'(0) = 0, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) \neq 0$, numărul de derivări $n = 4$ fiind număr par şi $f^{(4)}(0) < 0$ deducem că în $x_1 = 0$ funcţia f are maxim local.

Privind $x_2 = \pi$ avem: $f'(\pi) = 0, f''(\pi) = 4 \neq 0$, numărul de derivări $n = 2$ fiind număr par şi $f''(\pi) > 0$ deducem că în $x_2 = \pi$ funcţia f are minim local.

În final, ţinând cont că funcţia f este periodică cu $T = 2\pi$, obţinem că toate punctele $x = x_1 + kT = 0 + k \cdot 2\pi = 2k\pi$ sunt puncte de maxim local şi toate punctele $x = x_2 + kT = \pi + k \cdot 2\pi = (2k+1)\pi$ sunt puncte de minim local ale funcţiei f, unde $k \in \mathbb{Z}$.

6.2.34 Avem $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} h^3 x e^{-h^2x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} h^3 e^{-h^2x^2} \left(2h^2x^2 - 1\right), \forall x \in \mathbb{R}$.

Funcţia $f''(x)$ se anulează pentru $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}h}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}h}$. Avem $f''(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}h}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}h}, +\infty\right)$, respectiv $f''(x) < 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}h}, \frac{1}{\sqrt{2}h}\right)$. Rezultă că funcţia f este convexă pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}h}\right]$, este concavă pe intervalul $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}h}, \frac{1}{\sqrt{2}h}\right]$ şi este convexă pe intervalul $\left[\frac{1}{\sqrt{2}h}, +\infty\right)$.

Din faptul că funcţia f este continuă în $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2h}}$, are derivată în x_1, f este convexă pe $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2h}}\right]$ şi concavă pe $\left[-\frac{1}{\sqrt{2h}}, \frac{1}{\sqrt{2h}}\right]$, rezultă că $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2h}}$ este un punct de inflexiune al funcţiei; similar, f este continuă în $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2h}}$, are derivată în x_2, f este concavă pe $\left[-\frac{1}{\sqrt{2h}}, \frac{1}{\sqrt{2h}}\right]$ şi convexă pe $\left[\frac{1}{\sqrt{2h}}, +\infty\right)$, deci $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2h}}$ este un punct de inflexiune al lui f.

6.2.35 a) Considerăm un polinom Q de grad $k \geq 2$, cu coeficienţi reali, având ca rădăcini numere reale distincte şi arătăm că rădăcinile polinomului Q' sunt de asemnea reale şi distincte.

Notăm $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ rădăcinile lui Q. Avem $Q(x_1) = 0, Q(x_2) = 0, \ldots, Q(x_k) = 0$. Aplicăm teorema lui Rolle funcţiei Q pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$ cu $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Funcţia polinomială Q este continuă pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, este derivabilă pe (x_i, x_{i+1}), $Q(x_i) = Q(x_{i+1})$, deci, pe baza teoremei, există $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ cu proprietatea $Q'(c_i) = 0$. Cele $k-1$ numere reale $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ obţinute sunt distincte după cum rezultă din $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3 < \ldots < x_{k-1} < c_{k-1} < x_k$ şi sunt rădăcini ale lui Q'. Deoarece Q' este polinom de grad $k-1$, conform teoremei fundamentale a algebrei, Q' are un total de $k-1$ rădăcini în mulţimea numerelor complexe. Aşadar toate rădăcinile lui Q' sunt numere reale şi distincte.

Mai departe raţionăm inductiv asupra polinomului P din enunţ, aplicând succesiv rezulatul demonstrat mai sus. Polinomul P are rădăcinile reale şi distincte $\Rightarrow P'$ are rădăcinile reale şi distincte $\Rightarrow P''$ are rădăcinile reale şi distincte $\Rightarrow \ldots \Rightarrow P^{(n-3)}$ are rădăcinile reale şi distincte $\Rightarrow P^{(n-2)}$ are rădăcinile reale şi distincte. Derivata $P^{(n-1)}$ este polinom de gradul 1, deci are o singură rădăcină, care evident este număr real.

b) Aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[a, c]$. Rezultă că există $d_1 \in (a, c)$ astfel încât

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(d_1).$$

Aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[c, b]$. Rezultă că există $d_2 \in (c, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(d_2).$$

Deducem că

$$f'(d_1) \cdot f'(d_2) = \frac{(f(c) - f(a))(f(b) - f(c))}{(c - a)(b - c)} < 0.$$

Cum f' are proprietatea lui Darboux pe intervalul $[d_1, d_2]$, din inegalitatea $f'(d_1) \cdot f'(d_2) < 0$ rezultă că există $d \in (d_1, d_2)$ astfel încât $f'(d) = 0$. În mod evident $d \in (a, b)$ are loc.

6.2.36 a) Funcţia $f : I \to I$ este contracţie dacă există $\lambda \in [0, 1)$, numit coeficient de contracţie, astfel încât

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in I.$$

Fie $x_1, x_2 \in I$ arbitrare, $x_1 < x_2$. Funcţia f fiind derivabilă pe I, îndeplineşte condiţiile teoremei lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$, adică f este continuă pe $[x_1, x_2]$ şi este derivabilă pe (x_1, x_2). Conform teoremei există $\xi \in (x_1, x_2)$ asfel încât $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$. Din $\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| = |f'(\xi)|$ şi $|f'(\xi)| \leq M$, deducem $\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leq M$ şi $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$. Prin ipoteză $M \in [0, 1)$. Deci funcţia f este contracţie cu coeficientul de contracţie $\lambda = M$.

b) Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Deoarece funcţia $f'(x) = a \cdot \mathrm{arctg} x, \forall x \in \mathbb{R}$ este continuă, $\mathrm{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, deducem că $\sup\{|f'(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} = |a| \frac{\pi}{2}$. Evident

$$|f'(x)| \leq \sup\{|f'(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} = |a| \frac{\pi}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determinăm $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sup \{ |f'(x)| | x \in \mathbb{R}\} = |a| \dfrac{\pi}{2} < 1$; atunci din $|f'(x)| \le |a| \dfrac{\pi}{2} < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, utilizând a), rezultă că funcţia f este contracţie având coeficientul de contracţie

$$\lambda = \sup \{ |f'(x)| | x \in \mathbb{R}\} = |a| \frac{\pi}{2}.$$

Obţinem $a \in \left(-\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right)$.

6.2.37 i) Formula de aproximare este

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = T_4(x),$$

cu eroarea

$$f(x) - T_4(x) = R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5,$$

unde ξ este un număr cuprins între 0 şi x.

a) Pentru $f(x) = \mathrm{tg}x$ avem $f(0) = 0$;

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $f'(0) = 1$; $\quad f''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $f''(0) = 0$;

$f'''(x) = \dfrac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x}$, $f'''(0) = 2$; $\quad f^{(4)}(x) = \dfrac{16\sin x + 8\sin^3 x}{\cos^5 x}$, $f^{(4)}(0) = 0$;

$f^{(5)}(x) = \dfrac{16 + 88\sin^2 x + 16\sin^4 x}{\cos^6 x}$;

$f(x) \approx 0 + \dfrac{1}{1!}x + \dfrac{0}{2!}x^2 + \dfrac{2}{3!}x^3 + \dfrac{0}{4!}x^4$, deci $\mathrm{tg}x \approx x + \dfrac{1}{3}x^3$,

eroarea $R_4(x) = \dfrac{16 + 88\sin^2 \xi + 16\sin^4 \xi}{120\cos^6 \xi}x^5$, ξ situat între 0 şi x.

b) Pentru $f(x) = a^x$ avem $f(0) = 1$;

$f'(x) = a^x \ln a$, $f'(0) = \ln a$; $\quad f''(x) = a^x \ln^2 a$, $f''(0) = \ln^2 a$;

$f'''(x) = a^x \ln^3 a$, $f'''(0) = \ln^3 a$; $\quad f^{(4)}(x) = a^x \ln^4 a$, $f^{(4)}(0) = \ln^4 a$;

$f^{(5)}(x) = a^x \ln^5 a$;

$f(x) \approx 1 + \dfrac{\ln a}{1!}x + \dfrac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \dfrac{\ln^3 a}{3!}x^3 + \dfrac{\ln^4 a}{4!}x^4$, deci $a^x \approx 1 + \ln a \cdot x + \dfrac{\ln^2 a}{2}x^2 + \dfrac{\ln^3 a}{6}x^3 + \dfrac{\ln^4 a}{24}x^4$,

eroarea $R_4(x) = \dfrac{a^\xi \ln^5 a}{120}x^5$, ξ situat între 0 şi x.

c) Pentru funcţia $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{a - x}$ avem $f(0) = \dfrac{1}{a}$;

$f'(x) = \dfrac{1}{(a-x)^2}$, $f'(0) = \dfrac{1}{a^2}$; $\quad f''(x) = \dfrac{2}{(a-x)^3}$, $f''(0) = \dfrac{2}{a^3}$;

$f'''(x) = \dfrac{6}{(a-x)^4}$, $f'''(0) = \dfrac{6}{a^4}$; $\quad f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(a-x)^5}$, $f^{(4)}(0) = \dfrac{24}{a^5}$;

$f^{(5)}(x) = \dfrac{120}{(a-x)^6}$;

$f(x) \approx \dfrac{1}{a} + \dfrac{\frac{1}{a^2}}{1!}x + \dfrac{\frac{2}{a^3}}{2!}x^2 + \dfrac{\frac{6}{a^4}}{3!}x^3 + \dfrac{\frac{24}{a^5}}{4!}x^4$, deci $\quad \dfrac{1}{a-x} \approx \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{1}{a^3}x^2 + \dfrac{1}{a^4}x^3 + \dfrac{1}{a^5}x^4$,

eroarea $R_4(x) = \dfrac{1}{(a-\xi)^6}x^5$, ξ situat între 0 şi x.

d) Avem $f(0) = 0$;

$f'(x) = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{a+x} + \dfrac{1}{a-x}\right)$, $f'(0) = \dfrac{1}{a^2}$; $\quad f''(x) = \dfrac{1}{2a}\left(-\dfrac{1}{(a+x)^2} + \dfrac{1}{(a-x)^2}\right)$, $f''(0) = 0$;

$f'''(x) = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{2}{(a+x)^3} + \dfrac{2}{(a-x)^3}\right)$, $f'''(0) = \dfrac{2}{a^4}$;

$f^{(4)}(x)=\frac{1}{2a}\left(-\frac{6}{(a+x)^4}+\frac{6}{(a-x)^4}\right)$, $f^{(4)}(0)=0$;

$f^{(5)}(x)=\frac{12}{a}\left(\frac{1}{(a+x)^5}+\frac{1}{(a-x)^5}\right)$;

$f(x)\approx 0+\frac{\frac{1}{a^2}}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{\frac{2}{a^4}}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4$, deci $\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}\approx\frac{1}{a^2}x+\frac{1}{3a^4}x^3$,

eroarea $R_4(x)=\frac{1}{10a}\left(\frac{1}{(a+\xi)^5}+\frac{1}{(a-\xi)^5}\right)x^5$, ξ situat între 0 şi x.

e) Avem $f(0)=a$;

$f'(x)=\left((a^n-x)^{\frac{1}{n}}\right)'=-\frac{1}{n}(a^n-x)^{\frac{1}{n}-1}=-\frac{1}{n}(a^n-x)^{\frac{1-n}{n}}$, $f'(0)=-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{a^{n-1}}$;

$f''(x)=-\frac{n-1}{n^2}(a^n-x)^{\frac{1-2n}{n}}$, $f''(0)=-\frac{n-1}{n^2}\cdot\frac{1}{a^{2n-1}}$;

$f'''(x)=-\frac{(n-1)(2n-1)}{n^3}(a^n-x)^{\frac{1-3n}{n}}$, $f'''(0)=-\frac{(n-1)(2n-1)}{n^3}\cdot\frac{1}{a^{3n-1}}$;

$f^{(4)}(x)=-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4}(a^n-x)^{\frac{1-4n}{n}}$, $f^{(4)}(0)=-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4}\cdot\frac{1}{a^{4n-1}}$;

$f^{(5)}(x)=-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{n^5}(a^n-x)^{\frac{1-5n}{n}}$;

$\sqrt[n]{a^n-x}\approx a-\frac{1}{na^{n-1}}x-\frac{n-1}{2n^2a^{2n-1}}x^2-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3a^{3n-1}}x^3-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^4a^{4n-1}}x^4$,

eroarea $R_4(x)=-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{120n^5}(a^n-\xi)^{\frac{1-5n}{n}}x^5$, ξ situat între 0 şi x.

ii) Formula de aproximare este

$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3=T_3(x)$,

cu eroarea $f(x)-T_3(x)=R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4$, unde ξ este un număr cuprins între x_0 şi x.

a) Avem

$$f(x)\approx f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3,$$

cu eroarea $R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-2)^4$, unde ξ este un număr cuprins între 2 şi x. Se obţine

$$f(2)=\frac{1}{2};\ f'(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'(2)=-\frac{1}{4};\ f''(x)=\frac{2}{x^3},f''(2)=\frac{1}{4};\ f'''(x)=-\frac{6}{x^4},\ f'''(2)=-\frac{3}{8};$$
$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}$$

$f(x)\approx\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{4}}{1!}(x-2)+\frac{\frac{1}{4}}{2!}(x-2)^2+\frac{-\frac{3}{8}}{3!}(x-2)^3$, deci $\frac{1}{x}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3$,

cu eroarea $R_3(x)=\frac{1}{\xi^5}(x-2)^4$, unde ξ este un număr cuprins între 2 şi x.

b) Avem

$$f(x)\approx f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3,$$

cu eroarea $R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4$, unde ξ este un număr cuprins între 1 şi x. Se obţine

$f(1)=1^1=1;\ f'(x)=xx^{x-1}+x^x\ln x=x^x(\ln x+1),\ f'(1)=1;\ f''(x)=x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1},$
$f''(1)=2;\ f'''(x)=x^x\ln^3 x+3x^x\ln^2 x+3x^{x-1}\ln x+3x^x\ln x+3x^{x-1}+x^x-x^{x-2},\ f'''(1)=3;$
$f^{(4)}(x)=$
$x^x\ln^4 x+4x^x\ln^3 x+6x^x\ln^2 x+4x^x\ln x+x^x+6x^{x-1}\ln^2 x+12x^{x-1}\ln x+6x^{x-1}-x^{x-2}-4x^{x-2}\ln x+2x^{x-3}$

$$f(x)\approx 1+\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2+\frac{3}{3!}(x-1)^3,\ \text{deci } x^x\approx 1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3,$$

cu eroarea $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)^4$, unde ξ este un număr cuprins între 1 şi x.

6.2.38 a) Polinomul MacLaurin de ordinul 3 pentru funcţia $f(x)=\sin x$ este

$$T_3(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=x-\frac{1}{6}x^3.$$

Eroarea aproximării $f(x)\approx T_3(x)$ se reprezintă

$$f(x)-T_3(x)=R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

unde ξ este un număr între 0 şi x, deci la aproximarea $\sin x\approx x-\dfrac{1}{6}x^3$ eroarea se reprezintă $\dfrac{\sin\xi}{24}x^4$ cu un număr ξ cuprins între 0 şi x.

Avem de determinat $a>0$ astfel încât $|f(x)-T_3(x)|\le 0.01, \forall x\in[-a,a]$, adică

$$\left|\frac{\sin\xi}{24}x^4\right|\le 0,01, \forall x\in[-a,a].$$

Din $\left|\dfrac{\sin\xi}{24}x^4\right|=|\sin\xi|\dfrac{|x|^4}{24}\le\dfrac{|x|^4}{24}, \forall x\in\mathbb{R}$, ţinând cont de $\dfrac{|x|^4}{24}\le 0,01\Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt[4]{0,24},\sqrt[4]{0,24}\right]$ deducem că numărul $a=\sqrt[4]{0,24}$ corespunde cerinţei.

b) Utilizând a) o aproximare este $\sin(0,6)\approx 0,6-\dfrac{1}{6}\cdot(0,6)^3$, adică $\sin(0,6)\approx 0,564$. Deoarece $x=0,6\in\left[-\sqrt[4]{0,24},\sqrt[4]{0,24}\right]$, privind eroarea aproximării are loc

$$|\sin(0,6)-0,564|\le 0,01.$$

Funcţii integrabile Riemann şi primitive

6.2.39 a) Dacă scriem termenul general a_n sub forma

$$a_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+...+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right),$$

observăm că termenii din paranteză reprezintă valorile funcţiei $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, calculată în punctele intermediare ale diviziunii

$$\Delta=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},..,\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}=1\right)$$

intervalului $[0,1]$, respectiv în punctele $\xi_i=\dfrac{i}{n}\in\left[\dfrac{i}{n},\dfrac{i+1}{n}\right]$, $i=1,2,...,n$, $\xi=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$, $x_i=\xi_i=\dfrac{i}{n}$, $i=1,2,...,n$, $x_0=0$. Factorul $\dfrac{1}{n}$ din faţa sumei este chiar norma acestei diviziuni cu puncte echidistante

$$x_i-x_{i-1}=\nu(\Delta)=\frac{1}{n}\to 0, n\to\infty.$$

Deci a_n se poate scrie ca o sumă Riemann

$$a_n = \sigma(f, \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right), n \geq 1.$$

Cum f este integrabilă, fiind continuă, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, \Delta, \xi) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

b) Avem $a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4$, $n \geq 1$ şi e clar că suma reprezintă o sumă Riemann pentru funcţia $f(x) = x^4$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, relativ la diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n) \in \text{Div}[0,1]$, cu $x_0 = 0$,

$$x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n}, ..., x_i = \frac{i}{n}, ..., x_n = \frac{n}{n} = 1,$$

echidistante şi cu sistemul de puncte intermediare

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}, \xi_i = x_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, ..., n,\ x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} = \nu(\Delta) = \text{norma diviziunii}$$

Deci

$$a_n = \sigma(f, \Delta, \xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4 \to \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5},$$

deoarece $f(x) = x^4$ este continuă, deci integrabilă Riemann.

c) Se procedează analog şi se obţine

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, \Delta, \xi),\ \text{ unde } f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^1 = 2.$$

e)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

f) Scriem şirul sub forma $a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}+\frac{i}{n^2}}$, $n \geq 1$. Considerăm funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, diviziunea

$$\Delta = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n}\right) \in \text{Div}[0,1]$$

şi punctele intermediare

$$\xi_i = \frac{i}{n} + \frac{i}{n^2} \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right],\ i = 1, 2, ..., n$$

Deci

$$a_n = \sigma(f, \Delta, \xi)\ \text{ şi } \nu(\Delta) = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \to 0,$$

astfel că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

Analog se tratează exemplele g) şi h). Pentru g) avem

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{5+2\frac{i}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{5+2\frac{i}{n}}}, \quad n \ge 1.$$

Se consideră funcţia $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$, $f\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5+2x}}$, continuă pe $[0,1]$ şi diviziunea $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n}{n}\right)$ cu $\nu\,(\Delta) = \max\,(x_i - x_{i-1}) = \max \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} \to 0$. Deci $a_n = \sigma\,(f, \Delta, \xi)$ cu $\xi = \left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n}{n}\right\}$ şi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5+2x}} dx = \sqrt{5+2x}\Big|_0^1 = \sqrt{7} - \sqrt{5}.$$

6.2.40 a) Pentru $n \le x \le n+1$, avem

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+n^2}},$$

$$0 \le \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \int_n^{n+1} dx = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}},$$

adică

$$0 \le a_n \le \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}.$$

Cu teorema cleştelui se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Pentru $0 \le x \le 1$, avem $\dfrac{1}{2} < 1 \le x+1 \le 2$, atunci $\dfrac{1}{x+1} < 1$, şi

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

Cu teorema cleştelui, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

6.2.41 Din inegalitatea $|f(x)| \le M$, $\forall x \in [0,1]$, avem

$$0 < |a_n| = \left|\int_0^1 x^n f(x) dx\right| \le \int_0^1 x^n\,|f(x)|\,dx \le M \int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1}.$$

Aşadar

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

6.2.42 Dacă f e crescătoare, atunci

$$f(a) \le f(x) \le f(b), \quad \forall x \in [a,b].$$

Integrând inegalitatea de mai sus, membru cu membru pe intervalul $[a,b]$, obţinem

$$\int_a^b f(a) dx \le \int_a^b f(x) dx \le \int_a^b f(b) dx,$$

$$(b-a)\,f(a) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\,f(b),$$

adică chiar inegalitatea cerută. În cazurile particulare, se calculează $f'(x)$ şi se arată că $f'(x) \ge 0$.

6.2.43 a) Explicităm funcţia f cu ajutorul semnului diferenţei

$$F(x) = \frac{2}{x^2+1} - x, \quad F : [0,2] \to \mathbb{R}$$

Din faptul că

$$F'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2} - 1 = -\frac{x^4+2x^2+4x+1}{(x^2+1)^2} < 0,\ x \in [0,2]$$

rezultă F este strict descrescătoare pe $[0,2]$ şi $F(1)=0$. Din tabelul de variaţie

x	0		1		2
$F'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$F(x)$	$F(0)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$F(2)$

rezultă că pentru $x \in [0,1]$, $F(x) \ge 0$, deci $f(x) = x$, iar pentru $x \in [1,2]$, $F(x) \le 0$, deci $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ \dfrac{2}{x^2+1}, & x \in (1,2]. \end{cases}$$

Pe $[0,1]$, f e integrabilă Riemann şi $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xdx = \dfrac{1}{2}$. Pe $(1,2]$, f diferită de funcţia $f_1(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$, $f_1 : [1,2] \to \mathbb{R}$ doar în punctul $x=1$ şi atunci f e integrabilă şi

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f_1(x)dx = \int_1^2 \frac{2}{x^2+1}dx = 2\text{arctg}x\Big|_1^2 = 2\text{arctg}2 - \frac{\pi}{2}$$

Deducem că

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2} + 2\text{arctg}2 - \frac{\pi}{2}.$$

b) Explicităm funcţia g şi obţinem

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ x-1, & x \in [1,2) \\ x-2, & x \in \left[2, \dfrac{5}{2}\right] \end{cases}$$

Funcţiile

$$g_1 : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g_1(x) = x,$$
$$g_2 : [1,2] \to \mathbb{R}, \quad g_2(x) = x-1,$$

sunt continue şi deci integrabile pe intervalele de definiţie. Aceste funcţii diferă de restricţiile lui g: $g\,\big|_{[0,1)}$, $g\,\big|_{[1,2)}$ în câte un punct, iar pe $\left[2, \dfrac{5}{2}\right]$ funcţia g e continuă, deci integrabilă. Cu teorema 5.2.17 avem că g e integrabilă pe $\left[0, \dfrac{5}{2}\right]$ şi avem

$$\int_0^{5/2} g(x)dx = \int_0^1 g_1(x)\,dx + \int_1^2 g_2(x)\,dx + \int_2^{5/2} g(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 xdx + \int_1^1 (x-1)\,dx + \int_2^{5/2} (x-2)\,dx =$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right|_1^2 + \left.\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\right|_2^{5/2} = \frac{1}{8}.$$

c) Se consideră funcţia $h_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h_1(x) = x^2$, $\forall x \in [0,1]$ care e continuă, deci integrabilă Riemann pe $[0,1]$ şi

$$\int_0^1 h_1(x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Însă conform Teoremei 5.2.17, deoarece funcţia h diferă de funcţia h_1 într-un număr finit de puncte $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$, deducem că şi h este integrabilă Riemann şi

$$\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 h_1(x)\,dx = \frac{1}{3}.$$

6.2.44 a) Se constată că f e continuă în $x = 0$, deci pe $\mathbb{R}$ şi atunci f admite primitive. Primitivele sale vor avea forma

$$f(x) = \begin{cases} \int x^3 dx, & x \le 0 \\ \int x dx, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^4}{4} + C, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} + C_1, & x > 0 \end{cases}$$

Constantele C şi C_1 se determină din condiţia ca F să fie continuă în $x = 0$. Deci

$$F(0-0) = F(0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = C \text{ şi } F(0+0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) = C_1.$$

Deducem că $C_1 = C$ şi atunci primitivele lui f vor fi:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{4} + C, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} + C, & x > 0 \end{cases}, C \in \mathbb{R}.$$

În mod analog se tratează exemplele b), c), d).

6.2.45 1. a) Dacă f ar admite primitive să presupunem că $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă. Atunci F este derivabilă în $x = 0$ şi $F'(0) = f(0) = 0$. Însă

$$F_s'(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-0)F'(c)}{x} \quad \text{unde } 0 < c < x. \text{(cu teorema lui Lagrange)}$$

Acum se deduce

$$F_s'(0) = \lim_{c\to 0} F'(c) = \lim_{c\to 0} f(c) = \lim_{c\to 0} 0 = 0.$$

De asemenea

$$F_d'(0) = \lim_{x\searrow 0} \frac{xF'(c)}{x} = \lim_{c\searrow 0} f(c) = \lim_{c\to 0} \frac{1}{c} = +\infty, \quad \text{unde } 0 < c < x.$$

Deci F nu e derivabilă în $x = 0$, astfel că F nu poate fi o primitivă a lui f.

b) Vom arăta că f nu are proprietatea lui Darboux. Pentru aceasta e suficient să arătăm că f nu transformă un interval tot într-un interval.

Fie $I = [2,3] \subset \mathbb{R}$ şi să observăm că

$$f(I) = f([2,3]) = f([2,3] \cap \mathbb{Q}) \cup f([2,3] \cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]).$$

Însă $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, şi atunci $f(I) = ([2,3] \cap \mathbb{Q}) \cup A$, unde $A \subset \left]4, 9\right[$. Este deci evident că mulţimea $f(I)$ nu este un interval şi atunci f nu are proprietatea lui Darboux, deci nu admite primitive.

c) Dacă f ar admite primitive, o primitivă a sa ar avea forma

$$F(x)=\begin{cases} C_1, & x\le 0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+C_2, & x>0\end{cases}$$

Din continuitatea lui F în $x=0$ rezultă că $C_1=C_2=C$. Se poate lua $C=0$ şi atunci

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$

trebuie să fie o primitivă a lui f, deci $F'(x)=f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Să cercetăm dacă $F'(0)=f(0)=a$. Avem

$$F_d'(0)=\lim_{x\searrow 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},$$

limită care se ştie că nu există. Deci F nu e derivabilă în $x=0$, deci nu poate fi primitivă a lui f.

d) Se tratează analog cu exerciţiul b), de exemplu se arată că intervalul $I=[1,2]$ nu are ca imagine $f(I)$ tot un interval.

e) Pentru $x<0$ putem scrie

$$\left(x\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\right)'=\mathrm{arctg}\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2},$$

iar de aici

$$\int\mathrm{arctg}\frac{1}{x}dx=x\mathrm{arctg}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

Să presupunem că f admite primitive. Atunci o primitivă F ar avea forma

$$F(x)=\begin{cases} x\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C, & x<0\\ x+C_1, & x\ge 0.\end{cases}$$

Din continuitatea lui F rezultă că $C_1=C$.

Să studiem acum derivabilitatea lui F în $x=0$

$$F_s'=\lim_{x\nearrow 0}\frac{x\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C-C}{x}=\lim_{x\nearrow 0}\mathrm{arctg}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=-\frac{\pi}{2}+0=-\frac{\pi}{2};$$

$$F_d'=\lim_{x\searrow 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\searrow 0}\frac{x+C-C}{x}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

Deci $F_s'(0)\ne F_d'(0)$, adică F nu e derivabilă în 0 şi astfel F nu poate fi primitivă a lui f.

g) Funcţia

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\ne 0\\ -1, & x=0\end{cases}$$

diferă de funcţia continuă

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\ne 0\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

într-un singur punct $x=0$.

Dacă f ar admite primitive atunci şi $f-g$ ar admite, ceea ce este fals, căci

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}0, & x\ne 0\\ -2, & x=0\end{cases}$$

nu are proprietatea lui Darboux.

h) Funcţia dată diferă de funcţia continuă $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \ln \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$,
doar în punctul $x = 0$. Dacă f ar admite primitive, atunci şi $f - g$ ar admite. Însă

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

şi această funcţie nu are proprietatea lui Darboux, deci nu admite primitive.

2) a) Explicităm funcţia f şi obţinem

$$f(x) = \begin{cases} x^n, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Funcţia f e continuă, deci admite primitive.

b) Avem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ x^n, & x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Cum f e continuă avem că f admite primitive.

c) Se consideră funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n} \cos \dfrac{1}{x^n}, & x \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Funcţia g este derivabilă pe $\mathbb{R}$, căci

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^n}{n} \cos \frac{1}{x^n} = 0,$$

şi încă

$$\begin{aligned} g'(x) &= \begin{cases} \dfrac{n+1}{n} \cos \dfrac{1}{x^n} + \sin \dfrac{1}{x^n}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{n+1}{n} \cos \dfrac{1}{x^n}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} + \begin{cases} \dfrac{1}{n^n}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \\ &= H(x) + f(x), \end{aligned}$$

unde funcţia $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă. Atunci $f = g' - H$ şi deci f admite primitive (ca diferenţă a două funcţii care admit primitive).

d) Se tratează analog, considerând funcţia derivabilă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n} \sin \dfrac{1}{x^n}, & x \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

e) Se arată că f este continuă.

6.2.46 În toate cazurile se foloseşte integrarea prin părţi. Să rezolvăm efectiv câteva dintre exemplele propuse:

b)

$$\int \ln^2 x dx = \int x' \ln^2 x\, dx = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2 \int x' \ln x dx$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

d)

$$I=\int e^{3x}\cos 2x\,dx=\int\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'\cos 2x\,dx=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{1}{3}2\int e^{3x}\sin 2xdx$$
$$=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\int\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'\sin 2xdx=\frac{1}{3}e^{3x}\sin 2x+\frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x-\frac{4}{9}\int e^{3x}\cos 2xdx.$$

Deci

$$I+\frac{4}{9}I=e^{3x}\left(\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{2}{9}\sin 2x\right)\Rightarrow\frac{13}{9}I=e^{3x}\left(\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{2}{9}\sin 2x\right),$$
$$I=\frac{1}{13}e^{3x}\left(3\cos 2x+2\sin 2x\right)+C.$$

f)

$$\begin{aligned}\int\operatorname{arctg}xdx &= \int x'\operatorname{arctg}x\,dx=x\operatorname{arctg}x-\int x\frac{1}{1+x^2}dx=\\ &= x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}dx=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2-9}dx &= \int\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-9}}dx=\int x\left(\sqrt{x^2-9}\right)'dx-9\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}\\ &= x\sqrt{x^2-9}-\int\sqrt{x^2-9}dx-9\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|.\end{aligned}$$

Rezolvând această ecuaţie în raport cu $\int\sqrt{x^2-9}dx$ găsim

$$\int\sqrt{x^2-9}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)+C,x\in]3,+\infty[.$$

n)

$$\begin{aligned}I_n &= \int\frac{x^n}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int x^{n-1}\left(\sqrt{x^2+2}\right)'dx\\ &= x^{n-1}\sqrt{x^2+2}-(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{x^2+2}=x^{n-1}\sqrt{x^2+2}-(n-1)\int x^{n-2}\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx\\ &= x^{n-1}\sqrt{x^2+22}-(n-1)\int\frac{x^n}{\sqrt{x^2+2}}dx-2\left(n-1\right)\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+2}}\\ &= x^{n-1}\sqrt{x^2+2}-(n-1)\,I_n-2\left(n-1\right)I_{n-2}.\end{aligned}$$

Rezolvând în raport cu $I_n,$ obţinem

$$I_n=\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+2}-\frac{2\left(n-1\right)}{n}I_{n-2},\ \ n\geq 2.$$

Pentru $n=2$

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2}-I_0=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2}-\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx;\\ I_2 &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)+C.\end{aligned}$$

Pentru $n=3$

$$\begin{aligned}I_3 &= \frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2+2}-\frac{4}{3}I_1,\\ I_1 &= \int\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{x^2+2},\\ I_3 &= \frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2+2}-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+2}+C.\end{aligned}$$

6.2.47 a) Cu schimbarea de variabilă $\cos x = t$, avem

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{-dt}{1+t^2} = -\mathrm{arctg}\, t + C = -\mathrm{arctg}\,(\cos x) + C$$

b) Cu schimbarea de variabilă arctg $x = t$, $\dfrac{1}{1+x^2}dx = dt$, avem

$$\int \frac{\mathrm{arctg}^5 x}{1+x^2}dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}\mathrm{arctg}^6 x + C.$$

c) Cu schimbarea de variabilă $x^3 = t$, $3x^2 dx = dt$ avem

$$\int \frac{x^2}{x^6+1}dx = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\mathrm{arctg} t + C = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(x^3\right) + C.$$

g) Cu schimbarea de variabilă $2^x = t$, $2x \ln 2 dx = dt$ avem

$$\begin{aligned}\int \frac{2^x}{4^x-1}dx &= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2\ln 2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + C = \\ &= \frac{1}{\ln 4}\ln\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right) + C.\end{aligned}$$

h) Cu schimbarea de variabilă $x^2 + 2x = t$, $2(x+1)\,dx = dt$ obţinem

$$\begin{aligned}\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+2x\right)^3} + C.\end{aligned}$$

l) Cu schimbarea de variabilă $e^{-x} = t$, $-e^{-x}dx = dt$ avem

$$\int \frac{1}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin\left(e^{-x}\right) + C.$$

m) Cu schimbarea de variabilă $x = 4\sin t$, $dx = 4\cos dt$, $t = \arcsin\dfrac{x}{4}$ avem

$$\begin{aligned}\int \sqrt{16-x^2}dx &= \int \sqrt{16\left(1-\sin^2 t\right)}\cdot 4\cos dt = 16\int \cos^2 t\; dt = \\ &= 16\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 8\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \\ &= 8\left(t + \sin t\cos t\right) + C = 8\left(\arcsin\frac{x}{4} + \frac{x}{16}\sqrt{16-x^2}\right) + C.\end{aligned}$$

n) Cu schimbarea de variabilă $x+1 = t^6$, $t = \sqrt[6]{x+1}$, $dx = 6t^5 dt$ avem

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}dx &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3-t^2} = 6\int \frac{t^3-1+1}{t-1}dt \\ &= 6\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln(t-1)\right) \\ &= C\,2\sqrt[6]{(x+1)} + 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}-1\right) + C.\end{aligned}$$

p) Cu schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1}{t}$, $dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$ avem

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} &= -\int \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4-(t+1)^2}} \\ &= -\arcsin\frac{t+1}{2} + C = -\arcsin\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{2}\right) + C = -\arcsin\left(\frac{x+1}{2x}\right) + C.\end{aligned}$$

r) Putem scrie

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}x+x^2\right)}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}} \end{aligned}$$

Facem schimbarea de variabilă $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\cos t$, $dx=\frac{1}{2}\sin t\,dt$, $t=\arccos(1-2x)$,

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 t}} = \int \frac{\sin t}{\sin t}dt = t+C = \arccos(1-2x)+C.$$

s) Având în vedere că $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, e convenabil să facem substituţia $\mathrm{tg}x=t$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx &= \int \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt = -\frac{1}{2}\int \ln\left(1+t^2\right)dt = -\frac{1}{2}\int t'\ln\left(1+t^2\right)dt \\ &= -\frac{1}{2}t\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{2}\int t\frac{2t}{1+t^2}dt \\ &= -\frac{1}{2}t\ln\left(1+t^2\right)+\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = -\frac{1}{2}t\ln\left(1+t^2\right)+t-\mathrm{arctg}t+C \\ &= t\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)+t-\mathrm{arctg}\,t+C \\ &= \mathrm{tg}x\ln(\cos x)+\mathrm{tg}x-x+C. \end{aligned}$$

t) Facem schimbarea de variabilă $x^2=u$, $2xdx=du$

$$\begin{aligned} \int xe^{x^2}\left(x^2+1\right)dx &= \frac{1}{2}\int e^u(u+1)\,du = \frac{1}{2}\int (e^u)'(u+1)\,du \\ &= \frac{1}{2}e^u(u+1)-\frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u(u+1)-\frac{1}{2}e^u+C \\ &= \frac{1}{2}ue^u+C = \frac{1}{2}x^2e^{x^2}+C. \end{aligned}$$

6.2.48 a) Descompunem în fracţii simple

$$f(x)\equiv \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x+1},\ x\equiv A(x+1)+B(2x+1),\ x\equiv(A+2B)x+A+B.$$

Constantele A şi B se obţin din sistemul

$$A+2B=1,\ A+B=0 \Rightarrow A=-1,\ B=1.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(2x+1)(x+1)}dx &= \int -\frac{1}{2x+1}dx+\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln(2x+1)+\ln(x+1)+C = \ln\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}+C. \end{aligned}$$

b) Avem

$$f(x)=\frac{x}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)}=\frac{x}{(x-2)(2x+1)}.$$

Se descompune în fracţii simple şi se continuă ca şu în exemplul a)

c) Avem

$$\frac{x-4}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

Se obţine $A = -4,\ B = -3,\ C = 4$, de unde

$$\begin{aligned} \int \frac{x-4}{x(x-1)^2}dx &= -4\int \frac{dx}{x} - 3\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 4\int \frac{dx}{x-1} \\ &= -4\ln x + \frac{3}{x-1} + 4\ln(x-1) + C = \frac{3}{x-1} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^4 + C. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+5}dx &= \int \frac{2x}{x^2+5}dx + \int \frac{1}{x^2+5}dx = \\ &= \ln\left(x^2+5\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+4x+5}dx &= \int \frac{x-1}{(x+2)^2+1}dx \overset{x+2=t}{=} \int \frac{t-3}{t^2+1}dt \\ &= \int \frac{t}{t^2+1}dt - 3\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) - 3\text{arctg}\ t + C = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+5\right) - 3\text{arctg}\,(x+2) + C. \end{aligned}$$

f) Avem

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Prin identificare, se obţine sistemul

$$A+B=0,\ -A+B+C=0,\ \ A+C=1,$$

cu soluţia

$$A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3},\ C = \frac{2}{3}.$$

Atunci

$$I = \int \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}\ln(x+1) -$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx.$$

Facem substituţia $x - \frac{1}{2} = t$, rezultă

$$I = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{t+\frac{1}{2}-2}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt +$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

g)

$$f(x) = \frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2 - 2x^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)} = \frac{Ax+B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Eliminând numitorii şi identificând numărătorii se obţine sistemul liniar

$$A + C = 0,\ (A - C)\sqrt{2} + B + D = 0,\ A + C + (B - D)\sqrt{2} = 0,\ B + D = 1,$$

cu soluţia

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{4},\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{\sqrt{2}}{4},\ D = \frac{1}{2}.$$

Atunci

$$I = \int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{\frac{-\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}dx + \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{2}x - 2}{x^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{2}{4} + \frac{1}{2}}dx + \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{2}x + 2}{x^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{2}{4} + \frac{1}{2}}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{2}x - 2}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}dx + \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{2}x + 2}{\left(x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}dx.$$

La prima integrală punem $x - \frac{\sqrt{2}}{2} = t$, iar la a doua $x + \frac{\sqrt{2}}{2} = u$ şi obţinem

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = -\frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{2}\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2}{t^2 + \frac{1}{2}}dt + \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{2}\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2}{u^2 + \frac{1}{2}}du =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{t}{t^2 + \frac{1}{2}}dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2 + \frac{1}{2}}dt + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{u\,du}{u^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2 + \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}t\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(u^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}u\right) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}x - 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}x + 1\right) + C.$$

h) Funcţia $f(x) = \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}$, o descompunem în fracţii simple

$$\frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+9\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9}.$$

Din identificare se obţin $A = 0,\ B = -9,\ C = 0,\ \ D = 1.$ Rezultă

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}dx = -9\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2} + \int \frac{dx}{x^2+9}.$$

Dacă notăm $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+9)^n}$, atunci

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2} dx = -9I_2 + I_1$$

Însă $I_1 = \frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x}{3}$, iar pentru a ajunge la I_2 integrăm prin părţi pe I_1(în general pentru a obţine I_n, integrăm prin părţi pe I_{n-1}). Avem

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{x^2+9} = \int x' \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{x}{x^2+9} - \int x \frac{-2x}{\left(x^2+9\right)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2+9} + 2\int \frac{1}{x^2+9} dx - 18 \int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2}. \end{aligned}$$

Rezultă

$$18I_2 = \frac{x}{x^2+9} + 2I_1 - I_1 \text{ sau } I_2 = \frac{1}{18}\frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{18}\frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x}{3}.$$

În final

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2} dx &= -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+9} - \frac{1}{6}\text{arctg}\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x}{3} + C = \\ &= -\frac{x}{2\left(x^2+9\right)} + \frac{1}{6}\text{arctg}\frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

l) Avem

$$\int \frac{x+4}{\left(x^2+4\right)^3} dx = \int \frac{x}{\left(x^2+4\right)^3} dx + 4\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^3} dx \tag{1}$$

La prima integrală punem $x^2+4=t$, $2xdx = dt$

$$\int \frac{x}{\left(x^2+4\right)^3} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{4\left(x^2+4\right)^2}.$$

Integrala a doua din (1) o notăm cu

$$I_3 = \int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}.$$

Vom considera şi pe $I_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$, pe care o integrăm prin părţi

$$I_2 = \int x' \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2} dx = \frac{x}{\left(x^2+4\right)^2} - \int x \frac{-2\left(x^2+4\right)\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^4} dx =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+4\right)^2} + 4\int \frac{x^2+4-4}{\left(x^2+4\right)^3} dx = \frac{x}{\left(x^2+4\right)^2} + 4\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2} - 16I_3.$$

De aici se obţine

$$16I_3 = \frac{x}{\left(x^2+4\right)^2} + 4I_2 - I_2 = \frac{x}{\left(x^2+4\right)^2} + 3I_2;$$

$$I_3 = \frac{1}{16}\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2} + \frac{3}{16}I_2. \tag{2}$$

Acum pentru a obţine pe I_2, plecăm de la I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{2} = \int x' \frac{1}{x^2+4}dx \\ &= \frac{x}{x^2+4} - \int x \frac{-2x}{(x^2+4)^2}dx = \frac{x}{x^2+4} + 2\int \frac{x^2+4-4}{(x^2+4)^2}dx \\ &= \frac{x}{x^2+4} + 2\int \frac{dx}{x^2+4} - 8\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}. \end{aligned}$$

Atunci

$$8I_2 = \frac{x}{(x^2+4)^2} + I_1, \text{ sau } I_2 = \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{16}\text{arctg}\frac{x}{2}$$

Acum din (2), obţinem

$$I_3 = \frac{1}{16}\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{128}\frac{x}{x^3+4} + \frac{3}{256}\text{arctg}\frac{x}{2}$$

Revenind la relaţia (1)

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{(x^2+4)^2}dx &= -\frac{1}{4(x^3+4)^2} + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{32}\frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{64}\text{arctg}\frac{x}{2} + C \\ &= \frac{x-1}{4(x^2+4)^2} + \frac{3}{32}\frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{64}\text{arctg}\frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

6.2.49 a) Se face schimbarea de variabile

$$\text{tg}\frac{x}{2} = t,\ x = 2\ \text{arctg}\ t,\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt,\ \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

şi se obţine

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{8t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{5t^2+8t+5}.$$

Trinomul $5t^2+8t+5$ are $\Delta < 0$ şi atunci se poate scrie ca o sumă de patrate

$$\begin{aligned} 5t^2+8t+5 &= 5\left(t^2+\frac{8}{5}t+1\right) = 5\left(t^2+2\frac{4}{5}t+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}\right) = \\ &= 5\left[\left(t+\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Revenind la integrală avem

$$\begin{aligned} 2\int \frac{dt}{5\left[\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]} &\overset{t+\frac{4}{5}=u}{=} \frac{2}{5}\int \frac{du}{u^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \frac{2}{5}\frac{5}{3}\text{arctg}\frac{5u}{3} + C = \frac{2}{3}\text{arctg}\left(\frac{5t+4}{3}\right) + C \\ &= \frac{2}{3}\text{arctg}\left(\frac{5\text{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right) + C. \end{aligned}$$

b) Funcţia $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$ este pară simultan în $\sin x$ şi $\cos x$ şi atunci se face substituţia

$$\text{tg}x = t,\ x = \text{arctg}\ t,\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Obţinem

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+2)}dt.$$

Descompunem în fracţii simple

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+2)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+2}.$$

Se obţine $A=0,\ \ B=-1,\ \ C=0,\ \ D=2$ şi

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+2)}dt &= -\int \frac{dt}{t^2+1} + 2\int \frac{dt}{t^2+2}\\ &= -\text{arctg}t + \frac{2}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = -x + \sqrt{2}\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}x}{\sqrt{2}}\right) + C.\end{aligned}$$

c) Cu substituţia $\text{tg}\frac{x}{2} = t$ se obţine

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\left(\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

d) Funcţia este impară în raport cu $\cos x$ şi se face substituţia $\sin x = t\,, \cos x dx = dt$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^3 x dx &= \int t^2\left(1-t^2\right)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{3} + C\\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

e) Funcţia e impară în raport cu $\sin x$ şi atunci e convenabilă substituţia $\cos x = t,\ -\sin x = dt$

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x dx &= -\int \left(1-t^2\right)^2 dt = -\int \left(1-2t^2+t^4\right)dt\\ &= 7 - t + 2\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.\end{aligned}$$

f) Funcţia e pară simultan în raport cu $\sin x$ şi $\cos x$ şi se pune $\text{tg}x = t,\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x - \cos^4 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^4}{\left(1+t^2\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^4}dt =$$

$$= \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^4}dt = \int \left(t^{-4}+3t^{-2}+3+t^2\right)dt =$$

$$= \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{3}{t} + 3t + \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3\text{tg}^3 x} - \frac{3}{\text{tg}x} + 3\text{tg}x + \frac{1}{3}\text{tg}^3 x + C.$$

g) Se transformă produsul în sumă

$$\begin{aligned}\cos x\cos 3x\cos 6x &= (\cos 4x + \cos 2x)\cos 6x =\\ &= \cos 10x + \cos 2x + \cos 8x + \cos 4x.\end{aligned}$$

Atunci
$$\int \cos x \cos 3x \cos 6x \, dx = \frac{1}{10}\sin 10x + \frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

h) Facem substituţia $\mathrm{tg} x = t$
$$\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^8 x} = \int \frac{dt}{t^8\left(t^2+1\right)}.$$

Descompunem funcţia raţională de sub integrală în fracţii simple
$$\frac{1}{t^8\left(t^2+1\right)} = \frac{A_8}{t^8} + \frac{A_7}{t^7} + \frac{A_6}{t^6} + ... + \frac{A_1}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}. \tag{1}$$

Determinarea constantelor $A_1, A_2, ..., A_8, B, C$ o vom face în felul următor: Determinăm pe A_8, înmulţind relaţia (1) în ambii membri cu t^8 şi apoi facem $t = 0$. Obţinem $A_8 = 1$ şi trecem în membrul stâng termenul $\frac{A_8}{t^8} = \frac{1}{t^8}$
$$\frac{1}{t^8\left(t^2+1\right)} - \frac{1}{t^8} = \frac{-t^2}{t^8\left(t^2+1\right)} = -\frac{1}{t^6\left(t^2+1\right)} = \frac{A_7}{t^7} + \frac{A_6}{t^6} + ...$$

Acum din identitatea
$$-\frac{1}{t^6\left(t^2+1\right)} = \frac{A_7}{t^7} + \frac{A_6}{t^6} + ... + \frac{A_1}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1},$$
determinăm pe A_7 ca şi pe A_8, adică înmulţim egalitatea în ambii membri cu t^7 şi apoi facem $t = 0$. Vom obţine $A_7 = 0$ şi identitatea devine
$$-\frac{1}{t^6\left(t^2+1\right)} = \frac{A_6}{t^6} + \frac{A_5}{t^5} + ... + \frac{A_1}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Procedând analog, găsim
$$A_6 = -1,\ A_5 = 0,\ A_4 = 1,\ A_3 = 0,\ A_2 = -1,\ A_1 = 0,\ B = 0,\ C = 1.$$

Aşadar
$$\frac{1}{t^8\left(t^2+1\right)} = \frac{1}{t^8} - \frac{1}{t^6} + \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2+1}$$
$$\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^8 x} = -\frac{t^{-7}}{7} + \frac{t^{-5}}{5} - \frac{t^{-3}}{3} + \frac{1}{t} + \mathrm{arctg}\, t + C =$$
$$= -\frac{1}{7}\frac{1}{\mathrm{tg}^7 x} + \frac{1}{5}\frac{1}{\mathrm{tg}^5 x} - \frac{1}{3}\frac{1}{\mathrm{tg}^3 x} + \frac{1}{\mathrm{tg} x} + x + C.$$

6.2.50 Folosim substituţia lui Euler
$$\sqrt{x^2+x+1} = x + t,$$
$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2tx + t^2,\ x\left(1-2t\right) = t^2 - 1,\ x = \frac{t^2-1}{1-2t}$$
$$dx = -2\frac{t^2-t+1}{\left(1-2t\right)^2}dt,\ \ x = 0 \Rightarrow t = 1,\ \ x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3}-1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}} = \int_1^{\sqrt{3}-1} \frac{-2\frac{t^2-t+1}{\left(1-2t\right)^2}dt}{\frac{t^2-2t}{1-2t}\left(\frac{t^2-1}{1-2t}+t\right)} = +2\int_1^{\sqrt{3}-1} \frac{t^2-t+1}{t\left(t-2\right)\left(t^2-t+1\right)}dt =$$
$$= 2\int_1^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{t\left(t-1\right)},\ \frac{1}{t\left(t-2\right)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2},\ A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &= 2\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t}\right)dt = \left(\ln|t-2|-\ln|t|\right)\Big|_1^{\sqrt{3}-1} = \\ &= \ln\left|\frac{t-2}{t}\right|\Big|_1^{\sqrt{3}-1} = \ln\sqrt{3}\end{aligned}$$

b) Facem substiuţia $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\ dt$ şi obţiem

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4-x^2}} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{\sin^2 t+1}.$$

Facem o nouă substituţie $\operatorname{tg} t = u$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{du}{u^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}u\Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

c) Facem substiuţia

$$\sqrt{x^2-x+1} = x-t,\ x = \frac{t^2-1}{2t-1},\ dx = 2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt.$$

Obţinem

$$I = \int\frac{du}{x-\sqrt{x^2-x+1}} = 2\int\frac{\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt}{t} = 2\int\frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt$$

Se descompune funcţia în fracţii simple şi se obţine

$$I = 2\int\frac{dt}{t}+3\int\frac{dt}{(2t-1)^2}-3\int\frac{dt}{2t-1} = 2\ln|t|-\frac{3}{2}\frac{1}{2t-1}-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C =$$

$$= 2\ln\left|x-\sqrt{x^2-x+1}\right|-\frac{3}{2\left(2x-2\sqrt{x^2-x+1}-1\right)}-\frac{3}{2}\ln\left|2x-2\sqrt{x^2-x+1}-1\right|+C.$$

d) Avem

$$I = \int_2^3\frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$$

Vom face cea de a treia substituţie a lui Euler

$$\begin{aligned}\sqrt{4x-x^2} &= tx,\ x=2\Rightarrow t=1,\ x=3\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{3},\\ x &= \frac{4}{t^2+1},\ dx = -\frac{-8t}{(t^2+1)^2}dt.\end{aligned}$$

Integrala devine

$$I = \frac{2}{3}\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{dt}{t^2-5/3} = \frac{2}{3}\frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5/3}}{t+\sqrt{5/3}}\right|\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)}{2}.$$

e) Avem

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = \int x^{-1}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx$$

Este o integrală binoamă $\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$ cu $m,n,p\in\mathbb{Q}$. În cazul nostru $m=-1, n=2, p=-\frac{1}{3}$. Cum $p\neq\mathbb{Z}$ dar $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{2} = 0\in\mathbb{Z}$, se face schimbarea de variabile $ax^n+b = t^r$ unde r este numitorul lui p,

$$x^2+1 = t^3,\ x = \left(t^3-1\right)^{1/2},\ dx = \frac{3}{2}t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Atunci
$$I=\int x^{-1}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{t}{t^3-1}dt=\frac{3}{2}\int\frac{t}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}$$
Se descompune funcţia raţională în fracţii simple şi se obţine
$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt\\
&\overset{t+\frac{1}{2}=u}{=} \frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\int\frac{u\,du}{u^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}\\
&= \frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}}+C\\
&= \frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln\left(t^2+t+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2+1}-1\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)+\\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}-1}{\sqrt{3}}\right)+C.
\end{aligned}$$

f) Avem
$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}=\int_{-1}^{1}\left(x^4+1\right)^{-\frac{1}{4}}dx,\ \text{unde } m=0,\ n=4,\ \ p=-\frac{1}{4}.$$
Deoarece
$$p\notin\mathbb{Z},\ \ \frac{m+1}{n}=\frac{0+1}{4}=\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z},\ \ \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\in\mathbb{Z}$$
facem cea dea treia substituţie a lui Cebîşev
$$a+bx^{-n}=t^{\lambda},\ \ \lambda=\text{numitorul lui } p.$$
În cazul nostru
$$1+x^{-4}=t^4,\ x^{-4}=t^4-1,\ \frac{1}{x^4}=t^4-1,\ x^4=\frac{1}{t^4-1},$$
$$x=-1,\ t=-\sqrt[4]{2},\ x=1,\ t=\sqrt[4]{2},x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}},dx=-\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}t^3dt.$$
Atunci
$$\int_{-1}^{1}\left(x^4+1\right)^{-\frac{1}{4}}dx=-\int_{-\sqrt[4]{2}}^{\sqrt[4]{2}}\frac{\sqrt[4]{t^4-1}}{t}\frac{t^3}{\sqrt[4]{\left(t^4-1\right)^5}}dt=-\int_{-\sqrt[4]{2}}^{\sqrt[4]{2}}t^2\frac{1}{t^4-1}dt=$$
$$=-\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{t^2}{(t-1)(t+1)\left(t^2+1\right)}dt=-\frac{1}{4}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{4}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+1}=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^2-\operatorname{arctg}\sqrt{2}=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$
h) Avem că
$$\int\sqrt{x^4+x^3}dx=\int\left(x^4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}dx=\int\left[x^3(x+1)\right]^{\frac{1}{2}}dx=\int x^{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}dx,$$
este o integrală binoamă cu $m=\frac{3}{2},\ n=1,\ \ p=\frac{1}{2}$, unde
$$\frac{m+1}{n}=\frac{\frac{3}{2}+1}{1}=\frac{5}{2}\notin\mathbb{Z},\ \ \frac{m+1}{n}+p=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3\in\mathbb{Z}.$$

Facem a treia substituţie a lui Cebîşev

$$1+x^{-1}=t^2,\ x=\frac{1}{t^2-1}=\left(t^2-1\right)^{-1},\ dx=-2t\left(t^2-1\right)^{-2}dt$$

Atunci

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^4+x^3}dx &= -2\int\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}t\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}t\left(t^2-1\right)^{-2}dt=\\ &= -2\int t^2\left(t^2-1\right)^{-4}dt=-2\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^4}dt.\end{aligned}$$

Facem descompunerea în fracţii simple

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{(t-1)^4(t+1)^4} &= \frac{A_1}{(t-1)^4}+\frac{A_2}{(t-1)^3}+\frac{A_3}{(t-1)^2}+\frac{A_4}{t-1}+\\ &\quad+\frac{B_1}{(t+1)^4}+\frac{B_2}{(t+1)^3}+\frac{B_3}{(t+1)^2}+\frac{B_4}{t+1}.\end{aligned}$$

După calcule lungi se obţine

$$A_1=\frac{1}{16},\ B_1=\frac{1}{16},\ A_2=B_2=0,\ \ A_3=B_3=-\frac{1}{32},\ A_4=\frac{1}{32},\ B_4=-\frac{1}{32}$$

şi

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^4+x^3}dx=-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{(t-1)^4}-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{(t+1)^4}+\frac{1}{16}\int\frac{dt}{(t-1)^2}dt+\\ +\frac{1}{16}\int\frac{dt}{(t+1)^2}-\frac{1}{16}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{16}\int\frac{dt}{t+1}=\frac{1}{24}\frac{1}{(t-1)^3}+\\ +\frac{1}{24}\frac{1}{(t+1)^3}-\frac{1}{16}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{16}\frac{1}{t+1}+16\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C.\end{aligned}$$

Aici se înlocuieşte $t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$. i) $e^x=t,\ x=\ln t,\ \ dx=\frac{dt}{t}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x-2} &= \int\frac{dt}{t\left(t^2-t-2\right)}=\int\frac{dt}{t(t+1)(t+2)}\\ &= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+2}\\ &= \frac{1}{2}\ln|t(t+2)|-\ln(t-1)\\ &= \ln\frac{\sqrt{t(t+2)}}{(t-1)}+C.\end{aligned}$$

j) Integrala

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(-x^3+1\right)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

este o integrală binoamă cu $m=\frac{1}{2},\ n=3,\ p=-\frac{1}{2},\ p=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\in\mathbb{Z}$. Facem a treia substituţie a lui Cebîşev

$$-1+x^{-3}=t^2,\ x=\left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{3}},-x^3+1=t^2\left(t^2+1\right)^{-1},dx=-\frac{2}{3}+\left(t^2+1\right)^{-\frac{4}{5}}dt,$$

Atunci

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}dx=-\frac{2}{3}\int\left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{6}}t^{-1}\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{2}}t\left(t^2+1\right)^{-\frac{4}{3}}dt=$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}t+C=-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^3}}{x\sqrt{x}}\right)+C.$$

k) Se face schimbarea $1+x^3=t^2$

$$\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}dx=\frac{2}{3}\int_1^3 t^2dt=\frac{2}{3}\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^3=\frac{52}{9}.$$

l) Pentru calculul integralei

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\operatorname{tg}x\right)dx$$

în prealabil este util să stabilim relaţia

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b f\left(a+b-x\right)dx, \tag{1}$$

pentru orice funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, integrabilă Riemann. Justificarea este imediată. Să aplicăm relaţia (1) în cazul integralei noastre

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\operatorname{tg}x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\operatorname{tg}x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx-I.$$

Din această egalitate rezultă

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+tg\,x\right)dx=I$$

şi găsim

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+tg\ x\right)dx=\frac{1}{2}\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

6.2.51 1) a) Se constată că $f\left(x\right)\geq 0$ şi atunci

$$\text{Aria}\left(D\right)=\int_1^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$$

Se face substituţia $\frac{x-1}{x+1}=t^2,\ x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\ dx=\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt.$ atunci

$$\text{Aria}\left(D\right)=4\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{t^2dt}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

Avem

$$\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}=\frac{A}{\left(t-1\right)^2}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{\left(t+1\right)^2}+\frac{D}{t+1}.$$

Se obţine

$$\begin{aligned}\text{Aria}\left(D\right) &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\frac{1}{4}}{\left(t-1\right)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{t-1}+\frac{\frac{1}{4}}{\left(t+1\right)^2}-\frac{\frac{1}{4}}{t+1}dt=\frac{1}{4}\ln\left.\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\\ &-\left.\frac{1}{t-1}\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-\left.\frac{1}{t+1}\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{4}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

b) Avem

$$\text{Aria}\,(D) = 4\int_0^4 \frac{x+\left|x^2-1\right|}{|x+2|}$$

Explicitând funcţia de sub integrală, avem

$$\frac{x+\left|x^2-1\right|}{|x+2|} = \begin{cases} \dfrac{x+1-x^2}{x+2}, & x\in[0,1] \\ \dfrac{x+x^2-1}{x+2}, & x\in[1,4] \end{cases}$$

atunci

$$\text{Aria}\,(D) = \int_0^1 \frac{1+x-x^2}{x+2}dx + \int_1^4 \frac{x^2+x-1}{x+2}dx = \int_0^1\left(-x+3-\frac{5}{x+2}\right)dx + \int_1^4\left(x-1+\frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}+3x-5\ln(x+2)\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+2)\right)\Bigg|_1^4 = 7-5\ln 3+6\ln 2$$

c) Avem

Figura 5.8.1

$$A = \int_{-1}^1\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2}{2}\right)dx = \left(\text{arctg}\, x-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$$

d) Să aflăm punctele de intersecţie A şi B ale graficelor celor două funcţii (două parabole) $y = x^2+6x,\ y=-x^2-4$. Obţinem $A(-2,-8),\ \ B(-1,-5)$ Atunci

$$\text{Aria}\,(D) = \int_{-2}^{-1}\left(-x^2-4-x^2-6x\right)dx = \int_{-2}^{-1}\left(-2x^2-6x-4\right)dx = \left(-\frac{2}{3}x^3-3x^2-4x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} = \frac{1}{3}$$

Figura 5.8.2

e) Graficul celor două funcţii se intersectează în punctele de abscise $x=\dfrac{1}{e}$ şi $x=1$ şi în intervalul $x\in\left[\dfrac{1}{e},1\right]$ avem, $\ln x<0$ şi $\ln^2 x+\ln x<0$, astfel că

$$\begin{aligned}\text{Aria}\,(D) &= \int_{\frac{1}{e}}^1\left|\ln^2 x+\ln x\right|dx = \int_{\frac{1}{e}}^1\left(-\ln^2 x-\ln x\right)dx = \\ &= -\int_{\frac{1}{e}}^1 x'\ln^2 x dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx = -x\ln^2 x\Big|_{\frac{1}{e}}^1 + 2\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx \\ &= \frac{1}{e}+\int_{\frac{1}{e}.}^1 x'\ln x dx = \frac{1}{e}+x\ln x\Bigg|_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 dx = \frac{3}{e}-1.\end{aligned}$$

f) Parabola şi cercul se intersectează în punctele $A\left(2,2\sqrt{3}\right),\ B\left(2,-2\sqrt{3}\right).$

$$\begin{aligned}\text{Aria}\,(D_1) &= 2\int_0^2\sqrt{6x}dx + 2\int_2^4\sqrt{16-x^2}dx = \\ &= 2\sqrt{6}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^2 + 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\ dt\end{aligned}$$

Figura 5.8.3

La a doua integrală se pune $x = 4\sin t$.

$$\begin{aligned}\text{Aria}\,(D_1) &= \frac{16\sqrt{3}}{3} + 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{16\sqrt{3}}{3} + 4\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{3} + 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{13\sqrt{3}}{3} + \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

$$\text{Aria}\,(D_2) = \pi\cdot 16 - \text{Aria}\,(D_1) = 16\pi - \frac{13\sqrt{3}}{3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{44\pi}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

g) Să trasăm cele două parabole cu axele de simetrie paralele cu $0x$ şi să aflăm punctele lor de intersecţie. Punctele de intersecţie sunt $A\left(-1, 2\sqrt{6}\right)$, $B\left(-1, -2\sqrt{6}\right)$

$$\text{Aria}(D) = 2\int_{-2}^{-1}\sqrt{24\,(2+x)\,dx} + 2\int_{-1}^{2}\sqrt{8\,(2-x)\,dx} = 4\sqrt{6}\int_{-2}^{-1}\sqrt{2+x}dx + 4\sqrt{2}\int_{-1}^{2}\sqrt{2-x}dx = \frac{32\sqrt{6}}{3}.$$

Figura 5.8.4

6.2.52 a)

$$\begin{aligned} Vol\,(K_f) &= \pi\int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin^2 x dx = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} x'\arcsin^2 x dx \\ &= \pi x\arcsin^2 x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} x\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)'\arcsin x dx = \frac{\pi^3}{72} + 2\pi\,\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{\pi^3}{72} + 2\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6} - 2\pi\frac{1}{2} = \frac{\pi^3}{72} + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{6} - \pi \end{aligned}$$

b) Avem

$$\begin{aligned} Vol\,(K_f) &= \pi\int_0^3 \frac{x\,(x-3)}{x-4}dx = \pi\int_0^3 \frac{x^2-4x+x}{x-4}dx = \pi\int_0^3 x\,dx + \pi\int_0^3\frac{x-4+4}{x-4}dx \\ &= \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + \pi x\Big|_0^3 + 4\pi\ln|x-4|\Big|_0^3 = \frac{9\pi}{2} + 3\pi - 4\pi\ln 4 = \pi\left(\frac{15}{2} - 8\ln 2\right). \end{aligned}$$

c) Avem

$$\begin{aligned} Vol\,(K_f) &= \pi\int_a^b\sqrt{(x-a)\,(b-x)}dx = \pi\int_a^b\sqrt{-ab+(a+b)\,x-x^2}dx \\ &= \pi\int_a^b\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - ab - \left[\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{2\,(a+b)}{2}x + x^2\right]}dx \\ &= \pi\int_a^b\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4} - \left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2}dx \\ &\overset{\frac{a+b}{2}-x=u}{=} -\pi\int_{\frac{b-a}{2}}^{-\frac{b-a}{2}}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4} - u^2du} = \pi\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4} - u^2du}. \end{aligned}$$

Se face substituţia $u = \dfrac{b-a}{2}\sin t$ şi se obţine

$$Vol\,(K_f) = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(b-a)^2}{4}\cos^2 t\,dt = \frac{\pi\,(b-a)^2}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{\pi\,(b-a)^2}{8}\pi = \frac{\pi^2\,(b-a)^2}{8}.$$

e) Cercul $x^2+y^2=4$ se intersectează cu parabola $y^2=3x$ în punctele $A\left(1,\sqrt{3}\right)$, $B\left(1,-\sqrt{3}\right)$. Volumul corpului obţinut $K_{f\cdot g}$ va fi

$$\begin{aligned} Vol\left(K_{f\cdot g}\right) &= \pi\int_0^1 3xdx+\pi\int_1^2\left(4-x^2\right)dx=\pi\left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^1+\pi\left.\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2 \\ &= \frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}=\frac{19\pi}{6}. \end{aligned}$$

Figura 5.8.5

6.2.53 a) Avem

$$\begin{aligned} l\left(G_f\right) &= \int_1^4\sqrt{1+f'^2\left(x\right)}dx=\int_1^4\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2}dx=\int_1^4\sqrt{1+x^2+\frac{1}{16x^2}-\frac{1}{2}}dx \\ &= \int_1^4\sqrt{x^2+\frac{1}{16x^2}+\frac{1}{2}}dx=\int_1^4\frac{\sqrt{16x^2+8x^2+1}}{4x}dx=\int_1^4\frac{4x^2+1}{4x}dx=\frac{1}{4}\int_1^4\left(4x+\frac{1}{x}\right)dx= \\ &= \frac{1}{4}\left.\left[4\frac{x^2}{2}+\ln x\right]\right|_1^4=\frac{15+\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

b) Avem

$$\begin{aligned} l\left(G_f\right) &= \int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^x-e^{-x}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}+2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}dx= \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(e^x+e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}\left.\left(e^x-e^{-x}\right)\right|_0^1=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}-1+1\right)=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right). \end{aligned}$$

c) Avem

$$\begin{aligned} l\left(G_f\right) &= \int_0^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}dx=\int_0^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\left(x^2+1\right)^2}{\left(1-x^2\right)^2}}dx=\int_0^{\frac{2}{3}}\frac{x^2+1}{1-x^2}dx=-\int_0^{\frac{2}{3}}\frac{x^2-1+2}{x^2-1}dx= \\ &= -\int_0^{\frac{2}{3}}dx-2\int_0^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{x^2-1}=-x\Big|_0^{\frac{2}{3}}-2\frac{1}{2}\ln\left.\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right|_0^{\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}-\ln\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=-\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{5}=\ln 5-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

d) Avem

$$l\left(G_f\right)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx.$$

Punem $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $x=2\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$. Atunci

$$=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1\frac{dt}{t}=\ln t\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1=-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}=\ln\sqrt{3}.$$

a) Fie $I=\int\limits_a^b f\left(a+b-x\right)dx$; cu schimbarea de variabilă $t=a+b-x$ se ajunge la rezultatul dorit.

b) Fie $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$; folosind punctul a) rezultă $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$. Deci $2I=\frac{\pi}{2}$, de unde $I=\frac{\pi}{4}$.

6.3 Probleme propuse

6.3.1 Se consideră şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin

$$e \cdot x_n^2 = x_{n-1},\ \ n \geq 1,\ \text{ unde } x_1 = e^2;$$

$$2y_n = \ln x_n + 1,\ \ n \geq 1.$$

a) Să se arate că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ formează o progresie geometrică;

b) Să se determine limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} x_k$.

6.3.2 Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ dat de termenul general

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n},\ \ n \geq 1.$$

a) Să se enunţe *Criteriul lui Weierstrass* de convergenţă a şirurilor numerice;

b) Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent;

c) Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \sqrt{\frac{1}{2n+1}},\ \ n \geq 1,$$

iar apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

6.3.3 Se consideră şirul lui Euler $(c_n)_{n\geq 1}$, unde

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,\ \ n \geq 1.$$

a) Folosind inegalitatea

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},\ \ n \geq 1,$$

să se arate că şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este mărginit;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

6.3.4 Se consideră şirul numeric cu termenul general $x_n = ne^{-an}$, $n \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ şi şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, unde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, în funcţie de valorile parametrului real $a \in \mathbb{R}$;

b) Să se calculeze limita şirului de numere reale $(f_n(2))_{n\geq 1}$;

c) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$;

d) Să se precizeze natura convergenţei şirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

6.3.5 Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{1 + \sqrt[3]{2} + \ldots + \sqrt[3]{n}}, n \geq 1.$$

a) Să se determine valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{n^{\beta}}$ în raport cu valorile parametrilor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt[6]{n}}$.

6.3.6 Fie $p \in \mathbb{N}^*$şi şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 2}$ definit prin

$$x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \ldots + \sqrt[n]{p}}{p}\right)^n, \quad n \geq 2.$$

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{n}\right)$, pentru $p \in \mathbb{N}^*$;

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln p$ pentru orice $p \geq 2$.

c) Să se determine limita şirului $(x_n)_{n\geq 2}$.

6.3.7 Se consideră şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ definite respectiv prin

$$a_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \arcsin(nx)\, dx, \quad b_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \arctan(nx)\, dx, \quad n \geq 1.$$

a) Să se enunţe teorema de medie pentru integrala definită;

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$;

6.3.8 Se consideră şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2}, y_n = x_n - 1, \quad n \geq 1, x_0 = 2;$$

a) Să se arate că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică;

b) Să se determine termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^{\left(\sum\limits_{k=0}^{n} y_k\right)^n}$.

6.3.9 Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_1 = 1 \text{ şi } x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}, \quad x \geq 1.$$

a) Să se arate că $\dfrac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_n - \sqrt{2}} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{x_n + 1}$, $n \geq 1$;

b) Să se demonstreze inegalitatea $\left|x_n - \sqrt{2}\right| < \left(\sqrt{2} - 1\right)^n$, $n \geq 1$;

c) Să se determine limita şirului $(x_n)_{n\leq 1}$.

6.3.10 Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{-k^2}$, $n \geq 1$.

a) Să se enunţe *Critetiul general de convergenţă a lui Cauchy* pentru şiruri;

b) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent;

c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

6.3.11 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n = \dfrac{1}{n\,(4n^2-1)}$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că $x_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n-1}$ pentru orice $n \geq 1$;

b) Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$;

c) Să se calculeze suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Indicaţie: Pentru calcul sumei parţiale avem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{k}\right)\\
&= 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\\
&- \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2n+1}+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\\
&= 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)-1-\frac{1}{2n+1}\\
&+ \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\\
&= 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)-1-\frac{1}{2n+1}\\
&+ 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\\
&= 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)-2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{2n+1}\\
&= 2\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)-1-\frac{1}{2n+1}.
\end{aligned}$$

6.3.12 Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă $a_{n+1} = a_n + r$, $n \geq 1$, unde $a_1, r \in (0,\infty)$ sunt numere reale cunoscute.

a) Să se arate că $\dfrac{r}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}$, $n \geq 1$;

b) Să se studieze convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$;

c) Să se calculeze suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2+8n+3}$.

6.3.13 Se consideră şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin

$$x_n = \lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{kx}-1}{n^2x},\ y_n = \sqrt[n]{x_n - \frac{1}{2}} \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

a) Să se arate că $x_n = \dfrac{n+1}{2n}$ pentru $n \geq 1$;

b) Să se determine natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$;

c) Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-y_n)^n$

6.3.14 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\,|x-a| + |x-b|$. Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât funcţia f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

6.3.15 Fie polinomul $P(X) = X^{2n} - X^n + X + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{x_k-4}$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ sunt rădăcinile polinomului.

6.3.16 Să se demonstreze că $x - (1+x)\ln(1+x) < 0$, $(\forall)\, x > 0$ şi să se arate că funcţia $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ este monoton descrescătoare.

6.3.17 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \mathrm{arctg}x$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$;

b) Să se calculeze $f'(x)$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$;

d) Să se determine asimptota către $+\infty$;

e) Notăm cu $f^{(n)}(x)$ derivata de ordinul n. Claculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}$.

f) Să se arate că f este inversabilă şi notăm cu g inversa sa. Să se calculeze $g\left(1+\dfrac{\pi}{4}\right)$ şi $g'\left(1+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

g) Să se calculeze $\int\limits_0^{1+\frac{\pi}{4}} g(x)$ şi $g^{/}(0)$;

6.3.18 Să se demonstreze inegalitatea

$$\ln(1+x) > \frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2},\ \ x > 0.$$

6.3.19 Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos x + |x-1|\,e^{nx}}{1+e^{nx}}$ şi $g:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

a) Să se arate că $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ |x-1|, & x \geq 0; \end{cases}$

b) Să se studieze continuitatea pe $\mathbb{R}$ a fucţiei f;

c) Să se studieze derivabilitatea fucnţiei g;

d) Să se determine punctele de extrem global ale funcţiei g.

6.3.20 Să se arate că funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

admite primitive pe $[0,1]$, dar nu este integrabilă pe $[0,1]$.

Indicaţie: Funcţia f nu este integrabilă pe $[0,1]$ deoarece nu este mărginită. De exemplu, pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ definit prin $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi + 2\pi}}$ care tinde la 0, şirul valorilor $f(x_n)$ tinde la $+\infty$.

6.3.21 Să se arate că funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right]$, pentru $x \in (0,1]$ şi $f(0) = 0$, este integrabilă Riemann pe $[0,1]$.

6.3.22 Să se arate că funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = x^2$, dacă $x| \left\{\dfrac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\right\}$ şi $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = n$, $n \in \mathbb{N}$, nu este integrabilă Riemann.

6.3.23 Calculaţi următoarele integrale:

a) $\int\limits_0^1 e^x \sin x dx$; b) $\int\limits_0^1 e^x \sin^2 x dx$; c) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^3+1}$;

d) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^2+2\alpha x+1}$, $0 \le \alpha \le 1$; e) $\int\limits_0^\pi \left|\sin x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| dx$; f) $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$;

g) $\int\limits_0^\pi \dfrac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$; h) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{3+\cos x}$; i) $\int\limits_2^5 \dfrac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

j) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n x dx \; (n \in \mathbb{N}^*)$.

6.3.24 Să se calculeze integrala

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}, \; x \in (0, 2\pi).$$

6.3.25 Calculaţi, folosind definiţia integralei definite, următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} e^{\frac{ka+(n-k)b}{n}}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ne b$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(3n)}}{n^2}$.

6.3.26 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\int\limits_0^1 x^n \cos(x^n) dx}{\int\limits_0^1 x^n \ln(1+x)\, dx}$.

Indicaţie: Aplicăm fiecărei integrale metoda de integrare prin părţi şi obţinem

$$\int\limits_0^1 x^n \cos x^n dx = \frac{1}{n} \int\limits_0^1 x(\sin x^n)' dx = \frac{1}{n}\left(\sin 1 - \int\limits_0^1 \sin x^n dx\right),$$
$$\int\limits_0^1 x^n \ln(1+x) dx = \frac{1}{n+1} \int\limits_0^1 (x^{n+1})' \ln(1+x) dx = \frac{1}{n+1}\left(\ln 2 - \int\limits_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx\right).$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_0^1 x^n\cos x^n dx}{\int\limits_0^1 x^n\ln(1+x)dx}=\frac{\sin 1}{\ln 2}.$$

6.3.27 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{x^3}\sin t^2 dt}{x^9}$.

6.3.28 Aflaţi valoarea minimă a funcţiei

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(a)=\int\limits_0^1\left|x^2+a\right|dx,\ a\in\mathbb{R}.$$

6.3.29 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x^2}$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa. Să se arate că

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xF(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}.$$

6.3.30 Fie funcţia $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}-2\ln(x+2)$. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ aşa fel, încât funcţia $G:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$,

$$G(x)=\frac{a\ln(x+2)+bx+c}{x}$$

să fie o primitivă a funcţiei $g:]0,+\infty[\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ şi încă $\lim\limits_{x\searrow 0}G(x)=1$.

6.3.31 Calculaţi perechile de integrale

a) $I=\int\dfrac{xdx}{x^8+6x^4+1},\ J=\int\dfrac{x^5dx}{x^8+6x^4+1},\ x\in]0,+\infty[$,

b) $I=\int\dfrac{e^x-\cos x}{e^x-\cos x-\sin x}dx,\ J=\int\dfrac{\sin x}{e^x-\cos x-\sin x}dx$,

c) $I=\int\dfrac{x^2}{1+x^{12}}dx,\ J=\int\dfrac{x^8}{1+x^{12}}dx,\ x\in\mathbb{R}$.

6.3.32 Să se calculeze

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x},\ \text{unde } a,b>0.$$

6.3.33 Calculaţi derivatele funcţiilor

$$\begin{array}{lll}
1^0) & F:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, & F(x)=\int\limits_0^{x^4}\dfrac{dt}{1+t^4}\\
2^0) & F:\mathbb{R}\to\mathbb{R} & F(x)=\int\limits_0^{\text{arctg}x} e^{tg^2 t}dt,\\
3^0) & F:]-1,1[\to\mathbb{R} & F(x)=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x}\ln\left(1+\sin^2 t\right)dt.,
\end{array}$$

6.3.34 a) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă pe $[a, b]$, arătaţi că

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx;$$

b) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$.

6.3.35 a) Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^3 + \ldots + (-1)^n \left(\sqrt{x}\right)^n + \frac{(-1)^{n+1}\left(\sqrt{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt{x}},$$

oricare ar fi $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $0 \le \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt{x}} \le \left(\sqrt{x}\right)^{n+1}$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se deducă egalitatea $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt{x}} dx = 0$.

d) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt, \quad \text{pentu orice } x \in [0, 1].$$

6.3.36 a) Arătaţi că funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică de perioadă T dacă şi numai dacă

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = constant, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

b) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă şi periodică de perioadă T, atunci

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx, \quad \text{oricare ar fi } a \in \mathbb{R}.$$

c) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă şi periodică de periodaă T, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)\,dx, \quad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}.$$

6.3.37 a) Fie $u : [0, a] \to [0, b]$ o funcţie strict monotonă şi derivabilă. Arătaţi că

$$\int_0^a u(t)\,dt + \int_0^b u^{-1}(t)\,dt = ab,$$

unde $u^{-1} : [0, b] \to [0, a]$ este inversa funcţiei u.

b) Demonstraţi egalitatea

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\sin x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

6.3.38 Fie $a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b$

a) Să se calculeze

$$I_n = \int_a^b (x-a)^n (b-x)^n\,dx,\quad n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{I_n}.$$

Bibliografie

[1] Andrica D., Duca I.D., Purdea I., Pop Ioana, *Matematică de bază*, Editura Studium, Cluj Napoca, 2000

[2] Andrica D., şi colectiv, *Manual pentru clasa a XII*, Editura Plus, Bucureşti, 2003

[3] Aramă Lia, Morozan T., *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Vol. I, Editura Tehnică Bucureşti, 1964

[4] Bătineţu D.M., *Probleme de matematică-Şiruri*, Editura Albatros, 1979

[5] Chiriţă Stan, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989

[6] Cobzaş Ş., *Analiză matematică (Calcul diferenţial)*, Presa Universitară Clujeană, 1977

[7] Coroian I., *Analiză matematică. Integrarea*, Editura Risoprint, Cluj Napoca, 2004

[8] Demidovici B.P., *Problems in Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscow, 1976

[9] Danciu N., Flondor D., *Algebra şi Analiza matematică. Culegere de probleme*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979

[10] Duca D., Duca Eugenia, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Gil, Zalău, 1997

[11] Ganga M., *Matematică, manual pentru clasa a XII-a, Vol.I, Elemente de analiză matematică*, Editura Mathpress, Ploieşti, 2003

[12] Megan M., şi colectiv, *Analiză matematică*, Editura Amarcord, Timişoara, 1995

[13] Precupanu Anca, *Bazele analizei matematice*, Editura POLIROM, Iaşi, 1998

[14] Roşculeţ M., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980

[15] Siretchi Gh., *Calcul diferenţial şi integral*, Vol. 1 şi 2, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985